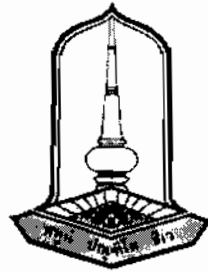


การคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวชนิดโลหะ
โดยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล

ตะวัน ทองสุข

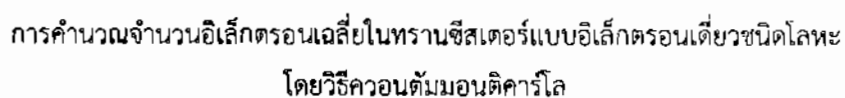
รายงานวิชาโครงงานฟิสิกส์
เสนอต่อมหาวิทยาลัยมหาสารคามเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์
เมษายน 2556
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยมหาสารคาม



**Calculation of Average Electron Number on
the Metallic Single Electron Transistor
by Quantum Monte Carlo Method**

Tawan Thongsuk

**Presented in partial fulfillment of requirements for
The Bachelor Degree of Science in Physics
Mahasarakham University
April 2013
All rights reserved by Mahasarakham University**



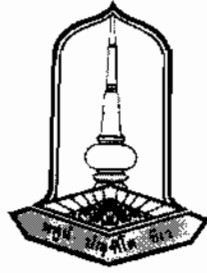
รายงานวิชาโครงการฟิสิกส์เสนอต่อมหาวิทยาลัยมหาสารคามเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาฟิสิกส์

สงไย กุทธีเจริณัทฏ
(อาจารย์ ดร. ศกชัย กุทธีเจริณัตถ)

(อาจารย์ ดร. กฤษกร ปาสาโน)

ช:ธณ ศส/๒
(อาจารย์ ดร. ประธาน ศรีวิไล)

วันที่ 23 เดือน เมษายน พ.ศ. 2556



Calculation of Average Electron Number on
the Metallic Single Electron Transistor
by Quantum Monte Carlo Method

Tawan Thongsuk

Presented in partial fulfillment of requirements for the Degree of Bachelor of
Science in Physics

Examination Committee:

..... *Supachai Ritjareonwath* Chairperson
(Dr. Supachai Ritjareonwathu)

..... *Krisakron Pasanai* Member
(Dr. Krisakron Pasanai)

..... *Prathan Srivilai* Member and Advisor
(Dr. Prathan Srivilai)

Date 23 April 2013

กิตติกรรมประกาศ

ในโครงการฟิสิกส์นี้สำเร็จได้ล่วงไปด้วยดี ผู้จัดทำขอขอบคุณ อาจารย์ ดร. ประธาน ศรีวิไล อาจารย์ที่ปรึกษา และคณะกรรมการ อาจารย์ ดร. ศุภชัย ฤทธิเจริญวัตถุ อาจารย์ ดร. กฤษกร ปาสาใน ที่ได้ให้คำปรึกษาและตรวจสอบข้อบกพร่องพร้อมทั้งชี้แนะ และภาควิชาฟิสิกส์ที่สนับสนุนงบประมาณในโครงการฟิสิกส์นี้

ขอขอบคุณคณาจารย์เจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคามทุกท่าน ที่ได้ให้คำปรึกษาชี้แนะและช่วยเหลืออำนวยความสะดวกทั้งในด้านความรู้และอุปกรณ์ต่างๆ สำหรับโครงการนี้

ขอบใจพี่ๆ เพื่อนๆ น้องๆ ทุกคนที่มีส่วนเกี่ยวข้องให้ความช่วยเหลือและให้คำปรึกษารวมไปถึงกำลังใจจากทุกคนที่ทำให้โครงการนี้สำเร็จสงได้

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ผู้ให้กำเนิดที่ให้การอบรมเลี้ยงดูและสนับสนุนด้านการศึกษาตลอดมา

ตะวัน ทองสุข

ชื่อโครงการ	การคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวชนิดโลหะโดยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล
ผู้ศึกษาค้นคว้า	นาย ตะวัน ทองสุข
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร. ประธาน ศรีวิไล
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ.) สาขาฟิสิกส์
มหาวิทยาลัย	มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ปีที่พิมพ์ 2556

บทคัดย่อ

โครงการนี้ได้ศึกษาและคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวชนิดโลหะที่เกิดจากปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์และการทะลุผ่านของอิเล็กตรอน ณ อุณหภูมิต่างๆ โดยใช้วิธีควอนตัมมอนติคาร์โล พบว่าปรากฏการณ์ดังกล่าวเกิดขึ้นเด่นชัดที่อุณหภูมิต่ำ นอกจากนี้ได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีซิงเกิลไซต์ฮัพเตดและฟูเรียร์ฮัพเตดพบว่าระเบียบวิธีที่สองมีประสิทธิภาพมากกว่าวิธีแรก กล่าวคือให้ผลการคำนวณที่มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าและสามารถลดเวลาในการประมวลผลได้ถึง 38%



TITLE Calculation of Average Electron Number on the Metallic Single Electron Transistor by Quantum Monte Carlo Method

AUTHOR Mr. Tawan Thongsuk

ADVISOR Dr. Prathan Srivilai

DEGREE Bachelor of Science in Physics (B.Sc. Physics)

UNIVERSITY Mahasarakham University **Date** 2013

Abstract

The average electron number on the metallic single electron transistor due to the effect of Coulomb Blockade and Electron Tunneling at any temperature is calculated by using path integral Monte Carlo (PIMC) approaches. The results show that those effects are the most prominent at low temperatures. Additionally, the efficiencies of the Single Site Update Algorithm (SSU) and Fourier Update Algorithm (FFT) techniques are compared. We found that the FFT technique needed significantly less processing time than SSU method. In essence, the processing time of the FFT technique was approximately 38% of that of the SSU method.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ.....	ก
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	ฉ
สารบัญรูปภาพ.....	ช
 บทที่ 1 บทนำ.....	 1
1.1 ที่มาและความสำคัญ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
1.3 ขอบเขตของโครงการ.....	3
1.4 สถานที่ทำโครงการ.....	3
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ.....	3
 บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	 4
2.1 ปรากฏการณ์ขีดขวางแบบคูลอมบ์.....	4
2.2 กล้องอิเล็กทรอนิกส์.....	5
2.3 ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์.....	9
2.4 จำนวนอิเล็กทรอนิกส์ในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์.....	15
 บทที่ 3 วิธีการทดลอง.....	 18
3.1 วิธีการมอนติคาร์โล.....	18
3.2 การสุ่มตัวอย่างแบบมอนติคาร์โล.....	20
3.2.1 การสุ่มตัวอย่างตามความสำคัญ.....	20
3.2.2 ระเบียบวิธีของเมโทโพรลิส.....	21
3.3 วิธีควอนตัมมอนติคาร์โล.....	21
3.3.1 การสุ่มตัวอย่างของเส้นทางจินตภาพ.....	22
3.3.2 ระเบียบวิธีฟูเรียร์แบบมอนติคาร์โล.....	24
3.4 การคำนวณค่าเฉลี่ยของประจุโดยใช้วิธีมอนติคาร์โล.....	25
3.5 ระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซด์ออฟเดพ.....	28
3.6 การสุ่มตัวอย่างแบบฟูเรียร์ออฟเดพ.....	30



สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลการทดลองและอภิปรายผล.....	32
4.1 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว	32
4.2 จำนวนประจุสุทธิเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว	34
4.3 ผลการเปรียบเทียบระเบียบวิธีซิงค์เกลือไซด์อ็อปเดฟและวิธีฟูเรียร์อ็อปเดฟ	36
บทที่ 5 สรุปผลและข้อเสนอแนะ.....	40
5.1 สรุปผลการทดลอง	40
5.2 ข้อเสนอแนะ	40
บรรณานุกรม.....	42
ประวัติผู้ทำโครงการ	44

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.1 ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย $\bar{e}$	38



สารบัญรูปภาพ

หน้า

รูปที่ 1.1 ภาพถ่ายด้วยกล้องจุลทรรศน์อิเล็กตรอนแบบส่องกราดของทรานซิสเตอร์แบบ อิเล็กตรอนเดี่ยว.....	1
รูปที่ 2.1 ตัวนำไฟฟ้าทรงกลม.....	4
รูปที่ 2.2 แบบจำลองของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	6
รูปที่ 2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงาน $E_C(n)$ กับตัวแปร n_x ของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยค่า n_x ขึ้นอยู่กับความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ขั้วเกิด.....	7
รูปที่ 2.4 ประจุเฉลี่ยในกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	9
รูปที่ 2.5 แบบจำลองของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	10
รูปที่ 2.6 ค่าศักย์เคมีของควอนตัมดอทที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อการเปลี่ยนแปลงแรงดันไฟฟ้า ที่ตกคร่อมอยู่ระหว่างขั้วซอร์สและขั้วเดรน.....	11
รูปที่ 2.7 วงจรสมมุติที่ได้จากการใช้ทฤษฎีเทเวนิน.....	12
รูปที่ 2.8 แผนภาพความเสถียรของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	14
รูปที่ 2.9 ค่าความนำไฟฟ้าของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	15
รูปที่ 3.1 ตัวอย่างการแบ่งเส้นทางจินตภาพ.....	22
รูปที่ 3.2 แผนผังการทำงานของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่าเฉลี่ยของประจุโดย วิธีการมอนติคาร์โล.....	27
รูปที่ 3.3 แผนภูมิของขั้นตอนของการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย ในกรณีของซิงค์เคลไซด์ออฟเดพ.....	29
รูปที่ 3.4 แผนภูมิของขั้นตอนของการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย ในกรณีของฟุเรียร์ออฟเดพ.....	31
รูปที่ 4.1 ผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	33
รูปที่ 4.2 ผลการคำนวณประจุสุทธิเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว.....	35
รูปที่ 4.3 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยจากการคำนวณโดยวิธีซิงค์เคลไซด์ออฟเดพและ ฟุเรียร์ออฟเดพที่ $\beta E_C = 1$	37
รูปที่ 4.4 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยจากการคำนวณวิธีซิงค์เคลไซด์ออฟเดพและ ฟุเรียร์ออฟเดพที่ $\beta E_C = 10$	37
รูปที่ 4.5 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยจากการคำนวณวิธีซิงค์เคลไซด์ออฟเดพและ ฟุเรียร์ออฟเดพที่ $\beta E_C = 20$	38



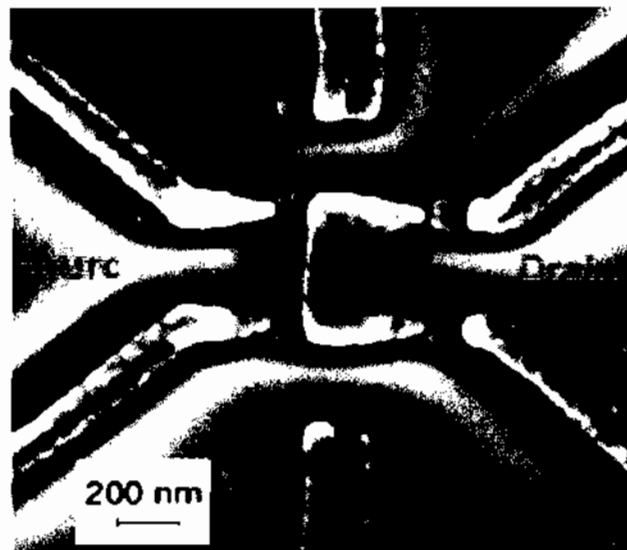
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว (Single Electron Devices) [1] เป็นอุปกรณ์ที่สามารถควบคุมให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ได้ทีละหนึ่งตัว ซึ่งอุปกรณ์ดังกล่าวกำลังได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางในการวิจัยด้านนาโนอิเล็กทรอนิกส์ (Nanoelectronic Research) เนื่องจากมีขนาดเล็กในระดับอะตอม (Atomic Scale) มีการสูญเสียพลังงานน้อย (Low Power Dissipation) และสามารถประยุกต์ใช้งานได้หลากหลาย เช่น ควอนตัมคอมพิวเตอร์ (Quantum Computers) เซลล์แสงอาทิตย์ (Solar Cells) สิ่งประดิษฐ์เชิงตรรกะ (Logic Devices) เป็นต้น

ในการอธิบายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว จำเป็นต้องใช้ทฤษฎีควอนตัมของอนุภาคหลายตัว (Quantum Many Body Theory) [2] ร่วมกับการประมวลผลแบบควอนตัมมอนติคาร์โล (Quantum Monte Carlo Simulation) แต่อย่างไรก็ตาม ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีดังกล่าวเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว ยกตัวอย่างเช่น ปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ (Coulomb Blockade Effect) [3] และการเพิ่มอิเล็กตรอนเข้าไปในควอนตัมดอท (Quantum Dot) ยังต้องถูกศึกษาและพัฒนาเพิ่มเติมเพื่อให้ได้เงื่อนไขของการเกิดปรากฏการณ์ดังกล่าวในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว เพื่อนำไปสู่องค์ความรู้ในการออกแบบและประยุกต์ใช้งานอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวได้อย่างมีประสิทธิภาพ



รูปที่ 1.1 ภาพถ่ายด้วยกล้องจุลทรรศน์อิเล็กตรอนแบบส่องกราด (Scanning Electron Microscope; SEM) ของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวชนิดโลหะ [4]

ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว (Single Electron Transistor) [1] เป็นอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่เป็นเครื่องมือพื้นฐานสำคัญในการศึกษาปรากฏการณ์การขัดขวางของคูมอมป์ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่ทำให้สามารถควบคุมอิเล็กตรอนให้เคลื่อนผ่านอุปกรณ์ได้ที่ละหนึ่งตัว ในโครงการนี้ได้ทำการศึกษทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวชนิดโลหะ (Metallic Single Electron Transistor) [4] ดังแสดงในรูป 1.1 โดยทั่วไปทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวประกอบไปด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านสองรอยต่อ (Tunneling Junction) คั่นอยู่ระหว่างขั้วซอร์ส (Source) กับควอนตัมดอท และควอนตัมดอทกับขั้วเดรน (Drain) โดยขั้วซอร์สและขั้วเดรนสามารถเชื่อมต่อกับแรงดันไฟฟ้าภายนอกได้ ศักย์ไฟฟ้าสถิต (Electrostatic Potential) ภายในควอนตัมดอทสามารถปรับเปลี่ยนได้โดยการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าที่ขั้วเกต (Gate Electrode) ในระบบนี้กำหนดให้อิเล็กตรอนสามารถทะลุผ่านรอยต่อได้เฉพาะรอยต่อที่อยู่ระหว่างขั้วซอร์สกับควอนตัมดอทและควอนตัมดอทกับขั้วเดรนเท่านั้น โดยรอยต่อระหว่างขั้วเกตกับควอนตัมดอทถูกสร้างให้มีความหนาแน่นมากพอจนกระทั่งอิเล็กตรอนไม่สามารถทะลุผ่านรอยต่อนี้ได้ ดังนั้นเมื่อความต่างศักย์ที่ขั้วเกตมีค่าเหมาะสมอิเล็กตรอนจึงสามารถเคลื่อนที่เฉพาะขั้วซอร์สไปยังขั้วเดรนเท่านั้น นอกจากนี้จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวยังขึ้นอยู่กับความต่างศักย์ที่ขั้วเกตนี้อีกด้วย ซึ่งถ้าเราทราบถึงเงื่อนไขในการเพิ่มหรือลดจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว ก็จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการประยุกต์ใช้งานชนิดนี้ แต่เนื่องจากค่าเฉลี่ยของอิเล็กตรอนในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวไม่สามารถคำนวณได้โดยตรง ดังนั้นจึงต้องประยุกต์ใช้วิธีการมอนติคาร์โลเพื่อคำนวณค่าอิเล็กตรอนเฉลี่ย ซึ่งวิธีดังกล่าวได้กลายเป็นวิธีมาตรฐานในการศึกษาอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว

ในโครงการนี้ได้ทำการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยและประจุมสุทธิตามทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวโดยใช้ระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดต (Single Site Update Algorithm) [5] นอกจากนี้เพื่อพัฒนาระเบียบวิธีของมอนติคาร์โลให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นโครงการนี้ยังได้ทำการคำนวณปริมาณดังกล่าวอีกครั้งด้วยระเบียบวิธีฟูริเยร์อัปเดต (Fourier Update Algorithm) [6] โดยนำผลการคำนวณมาเปรียบเทียบกับวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดต เพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีการใดมีประสิทธิภาพดีที่สุดและเหมาะสมในการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยและประจุมสุทธิตามทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวชนิดโลหะ

1.2.2 เพื่อประยุกต์ใช้วิธีฟูริเยร์มอนติคาร์โลในการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

คำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวชนิดโลหะ ที่อุณหภูมิ 5 ค่ากล่าวคือ $\beta E_g = \{1, 5, 10, 15, 20\}$ และค่าแรงดันไฟฟ้าแบบไม่มีหน่วย (Dimensionless Gate Voltage) n_g อยู่ในช่วง $(0, 1)$

1.4 สถานที่ทำการวิจัย

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

1.5.1 สามารถนำองค์ความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวแบบอื่นๆได้

1.5.2 สามารถประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีฟูเรียร์มอนติคาร์โล ในการศึกษาอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวได้

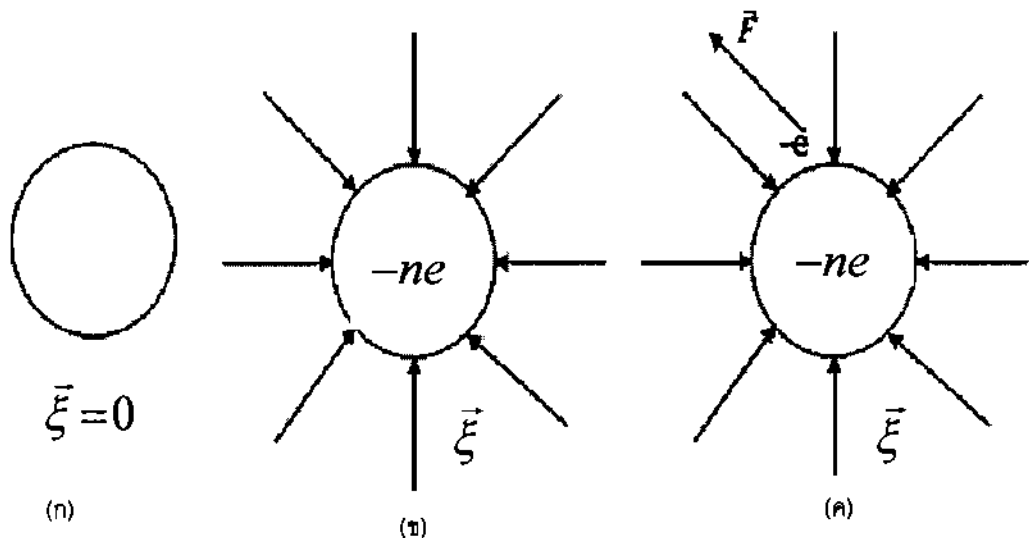
บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ได้กล่าวถึงปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์เป็นหัวข้อเริ่มต้น เพื่อแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ ซึ่งนำไปสู่การเกิดขึ้นของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว จากนั้นในหัวข้อที่ 2.2 และ 2.3 ได้นำเสนอผลการทดลองและแบบจำลองทางทฤษฎีของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวแบบพื้นฐาน กล่าวคือ กล่องอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว (Single Electron Box) [7] และ ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว (Single Electron Transistors) ตามลำดับ เพื่อเป็นพื้นฐานในการเข้าใจปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว ในหัวข้อที่ 2.4 ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวซึ่งเป็นวัตถุประสงค์หลักของโครงการวิจัยนี้

2.1 ปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์

ในการอธิบายปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว ให้พิจารณาตัวนำไฟฟ้าทรงกลมตัน (Spherical Conductor) ในเงื่อนไขต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 (ก) ตัวนำไฟฟ้าทรงกลมที่มีประจุรวมสุทธิเริ่มต้นเป็นศูนย์ รูปที่ 2.1 (ข) ตัวนำไฟฟ้าทรงกลมที่มีประจุไฟฟ้ารวมสุทธิ $-ne$ มีสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ส่วนรูปที่ 2.1 (ค) การเพิ่มประจุไฟฟ้า $(-e)$ เข้าไปในระบบ เนื่องจากแรงคูลอมบ์ประจุ $(-e)$ จะถูกผลักด้วยแรง $\vec{F}$ ซึ่งขนาดของแรงผลักขึ้นอยู่กับการกระจายประจุบนพื้นผิวด้านบน

จากรูป กำหนดให้ที่เวลาเริ่มต้นทรงกลมดังกล่าวเป็นกลางทางไฟฟ้ากล่าวคือมีจำนวนประจุไฟฟ้ารวมสุทธิเป็นศูนย์ ซึ่งในกรณีนี้สนามไฟฟ้า $\vec{E}$ มีค่าเป็นศูนย์ด้วยเช่นกัน ในลำดับต่อมาถ้านำประจุไฟฟ้า $(-en)$ เข้าไปไว้ในทรงกลม ดังรูปที่ 2.1 (ข) จากกฎของเกาส์ (Gauss's Law) พบว่า

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{-Q_0}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

ดังนั้นขนาดของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุดังกล่าวมีค่าเป็นไปตามสมการ

$$|\vec{E}| = \frac{ne}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.2)$$

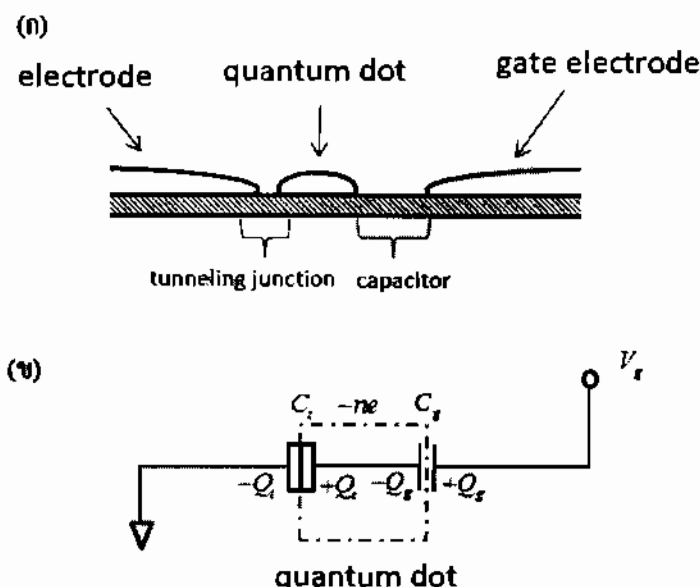
เมื่อ ϵ_0 คือ สภาพผ่านได้ของสุญญากาศ (Permittivity of Vacuum) และ R คือระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกลม จากสมการ (2.2) พบว่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับขนาดของประจุรวมสุทธิของทรงกลมและระยะ R ในลำดับต่อมาตามรูปที่ 2.1 (ค) ถ้าต้องการเพิ่มประจุไฟฟ้า $(-e)$ อีกหนึ่งตัวเข้าไปในระบบดังกล่าว ประจุดังกล่าวนี้จะถูกผลักด้วยแรงคูลอมบ์ ดังนั้นถ้านำประจุดังกล่าวเข้าไปในทรงกลมนี้พลังงานที่สะสมอยู่ในระบบ (Stored Energy) สามารถคำนวณได้จาก

$$E = \int_n^{(n+1)e} \frac{q dq}{C} = \frac{e^2}{C} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.3)$$

เมื่อ C หมายถึงค่าความจุไฟฟ้า (Capacitance) ของระบบ จากสมการที่ (2.3) เนื่องจากจำนวนประจุของอิเล็กตรอนมีค่าไม่ต่อเนื่องกล่าวคือเป็นจำนวนเท่าของ $(-e)$ ดังนั้นในการเพิ่มอิเล็กตรอนเข้าไปในระบบจึงทำได้ไม่ต่อเนื่องตามไปด้วย กล่าวคือ พลังงานในการเพิ่มประจุให้กับระบบตามสมการที่ (2.3) มีค่าไม่ต่อเนื่องนั่นเอง ซึ่งเป็นผลมาจากแรงผลักระหว่างประจุ ดังนั้นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจึงถูกเรียกว่าปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ (Coulomb Blockade Effect) ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงผลของปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว (Single Electron Devices) ชนิดพื้นฐานเพื่อนำไปสู่ความเข้าใจปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ที่เกิดขึ้นในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว

2.2 กล้องอิเล็กตรอนเดี่ยว

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ในอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวที่มีชื่อเรียกว่ากล้องอิเล็กตรอนเดี่ยวซึ่งมีแบบจำลอง ดังรูปที่ 2.2 (ก)



รูปที่ 2.2 (ก) แบบจำลองของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยวซึ่งประกอบไปด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านหนึ่ง รอยต่อและหนึ่งควอนตัมดอท รูปที่ 2.2 (ข) วงจรสมมูลของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว [8]

กล่องอิเล็กตรอนเดี่ยวประกอบไปด้วยควอนตัมดอทที่วางอยู่ตรงกลางระหว่างขั้วตัวนำ (Electrode) กับขั้วเกต (Gate Electrode) โดยมีรอยต่อของการทะลุผ่านเพียงรอยต่อเดียว จากคุณสมบัติของรอยต่อของการทะลุผ่านซึ่งทำหน้าที่เสมือนตัวเก็บประจุ ดังนั้นในระบบนี้จึงมีตัวเก็บประจุ สองตัวกล่าวคือตัวเก็บประจุที่อยู่ระหว่างขั้วตัวนำกับควอนตัมดอทและควอนตัมดอทกับขั้วเกต

เนื่องจากในบริเวณขั้วเกตกับควอนตัมดอทถูกสร้างให้มีความหนาแน่นมากพอ เพื่อไม่ให้อิเล็กตรอน สามารถทะลุผ่านจากควอนตัมดอทมายังขั้วเกตได้ แต่เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าที่ขั้วเกต จะทำให้ศักย์ไฟฟ้าสถิตที่ควอนตัมดอทมีการเปลี่ยนแปลงตามไปด้วยและทำให้อิเล็กตรอนที่อยู่ขั้วกราวด์ (Ground) มีโอกาสทะลุผ่านมายังควอนตัมดอทได้ ดังนั้นการทะลุผ่านของอิเล็กตรอนจะถูกควบคุมโดย แรงดันไฟฟ้าที่ให้กับขั้วเกต นอกจากนี้เพื่อศึกษากล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว จำเป็นต้องสร้างวงจรสมมูลซึ่ง วงจรสมมูลของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยวได้แสดงไว้ในรูป 2.2 (ข) กล่องอิเล็กตรอนเดี่ยวประกอบด้วยตัว เก็บประจุสองตัว ตัวเก็บประจุตัวแรก C_i อยู่ที่รอยต่อของการทะลุผ่าน และตัวเก็บประจุตัวที่สอง C_g อยู่ระหว่างขั้วเกตกับควอนตัมดอท จากรูปที่ 2.2 (ข) พบว่าเมื่อมีการเพิ่มประจุ n ตัวเข้าไปในกล่อง อิเล็กตรอนเดี่ยวเป็นไปตามสมการ

$$n(-e) = Q_i - Q_g \quad (2.4)$$

ดังนั้นจำนวนประจุที่ทะลุผ่านเข้าไปในควอนตัมดอท มีค่าเป็นไปตามสมการ

$$Q_i = -e(n - n_g) \quad (2.5)$$

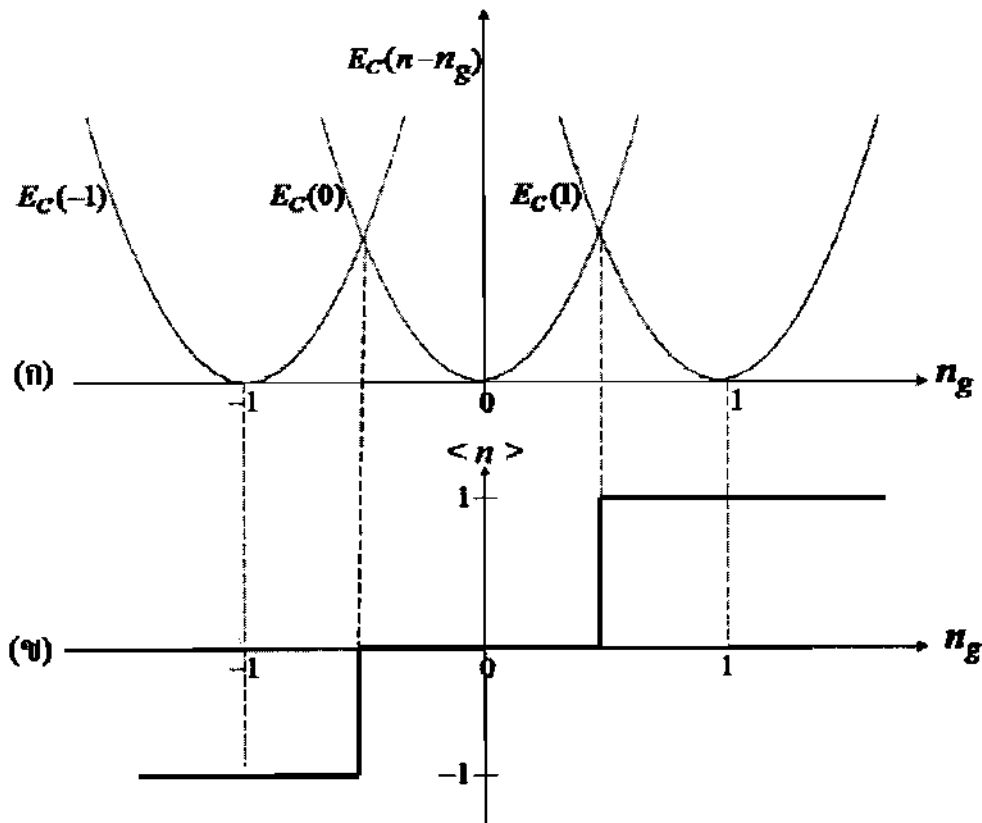
เมื่อ $n_g = Q/e$ ดังนั้นพลังงานการเพิ่มประจุ (Charging Energy) สามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$E_C(n) = \int_0^Q \frac{q dq}{C_\Sigma} = \frac{Q^2}{2C_\Sigma} = \frac{e^2}{2C_\Sigma} (n - n_g)^2 \quad (2.6)$$

เมื่อ C_Σ คือผลรวมของตัวเก็บประจุกล่าวคือเมื่อมองออกมาจากควอนตัมดอทตัวเก็บประจุทั้งสองตัวจะต่อแบบขนานกันโดย $C_\Sigma = C_i + C_g$ จากสมการที่ (2.6) พลังงานที่ใช้ในการเพิ่มอิเล็กตรอนเข้าไปในกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว จะถูกกำหนดโดยแรงดันไฟฟ้าที่ชั่วเกิดโดยนิยามตัวแปร n_g ตามสมการ

$$n_g = \frac{C_g V_g}{e} \quad (2.7)$$

โดย V_g คือแรงดันไฟฟ้าที่ชั่วเกิด และ C_g คือค่าความจุไฟฟ้าที่ชั่วเกิด จากสมการ (2.6) พบว่าค่า n_g มีค่าเพิ่มขึ้นแบบต่อเนื่องโดยขึ้นอยู่กับแรงดันไฟฟ้าที่ชั่วเกิด แต่จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง (n) มีค่าไม่ต่อเนื่องกล่าวคือต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าที่ชั่วเกิดกับจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยจึงมีลักษณะเป็นฟังก์ชันขั้นบันได ดังแสดงในรูป 2.3 (ข)



รูปที่ 2.3 (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงาน $E_C(n)$ กับตัวแปร n_g ของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยค่า n_g ขึ้นอยู่กับความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ชั่วเกิด รูปที่ 2.3 (ข) จำนวนประจุเฉลี่ยภายในกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว $\langle n \rangle$ ขึ้นอยู่กับค่า n_g ด้วยเช่นกัน [13]

ปรากฏการณ์การขัดขวางแบบโคลอมป์เกิดขึ้นเนื่องจากการที่อิเล็กตรอนไม่สามารถเคลื่อนเข้าไปในควอนตัมดอทได้จนกว่าศักย์ไฟฟ้าที่ขั้วเกตมีค่าเท่ากับศักย์ไฟฟ้าขีดเริ่ม $V_g^{th}(n)$ โดยศักย์ไฟฟ้าขีดเริ่มสามารถคำนวณได้จากสมการ (2.3) กล่าวคือ

$$V_g^{th}(n) = \frac{e}{C_g} \left(n \pm \frac{1}{2} \right) \quad (2.8)$$

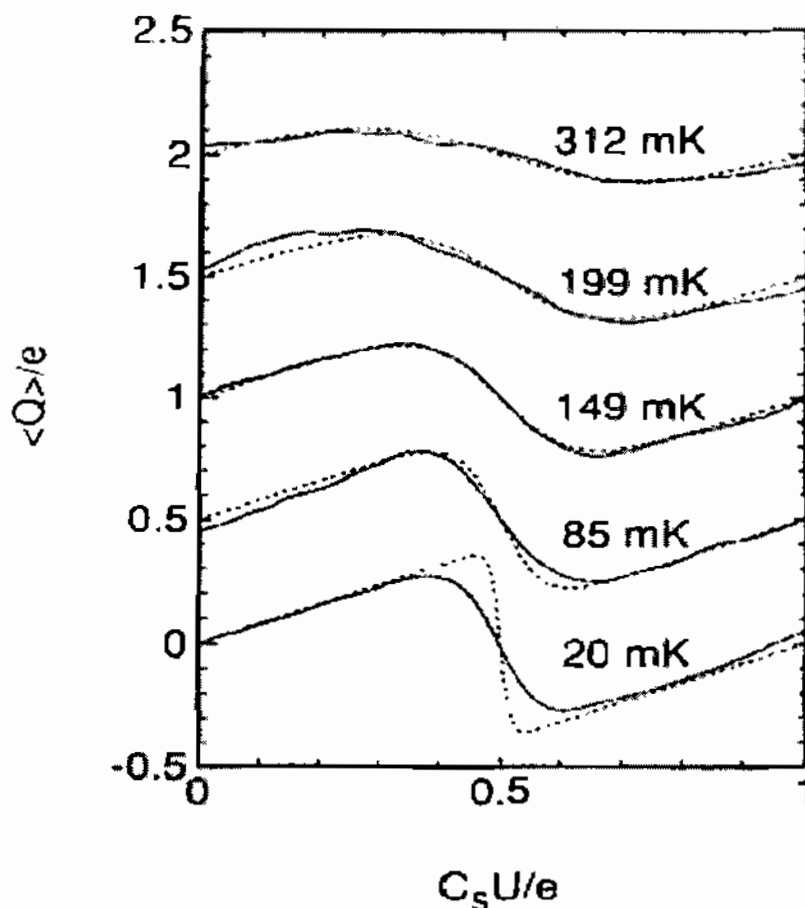
จากสมการ (2.6) ความสัมพันธ์ระหว่าง $E_C(n)$ กับค่า n_g เป็นสมการพาราโบลา (Parabola Equation) และพลังงานมีการเปลี่ยนแปลงที่ $n_g = n \pm 1/2$ ซึ่งบริเวณดังกล่าวจำนวนอิเล็กตรอนในกล่องจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงหนึ่งตัวเสมอ ดังรูปที่ 2.3 การเพิ่มขึ้นของจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยถูกกำหนดด้วยความต่างศักย์ที่ขั้วเกตเป็นไปตามสมการ

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{e}{C_g} < V_g < \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{e}{C_g} \quad (2.9)$$

รูปที่ 2.4 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลการทดลองและผลการคำนวณค่าประจุสุทธิเฉลี่ย $\langle Q \rangle$ ที่อยู่ของกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยค่าประจุสุทธิเฉลี่ยสามารถเขียนในเทอมของจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย $\langle n \rangle$ ได้ดังสมการ

$$\langle Q \rangle = \frac{C_i}{C_\Sigma} [\langle n \rangle (-e) + C_g V] \quad (2.10)$$

จากรูปที่ 2.4 เส้นประเป็นผลที่คำนวณได้จากทฤษฎีแบบดั้งเดิม (Classical Theory) [7] ซึ่งถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองที่แสดงด้วยเส้นทึบ พบว่าที่บริเวณอุณหภูมิสูง เช่น 312 mK ทฤษฎีดังกล่าวสามารถอธิบายผลการทดลองได้เป็นอย่างดี แต่ที่บริเวณอุณหภูมิต่ำ เช่น 20 mK ทฤษฎีแบบดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายผลการทดลองได้ถูกต้อง



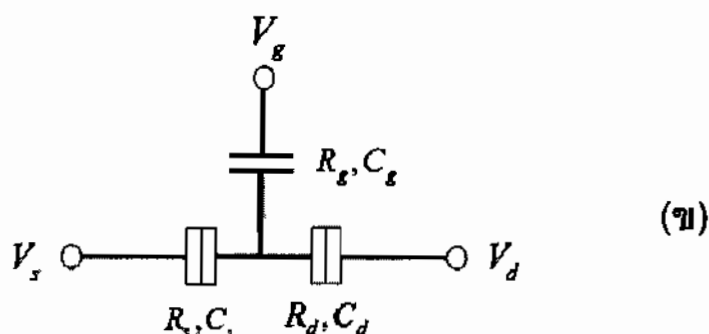
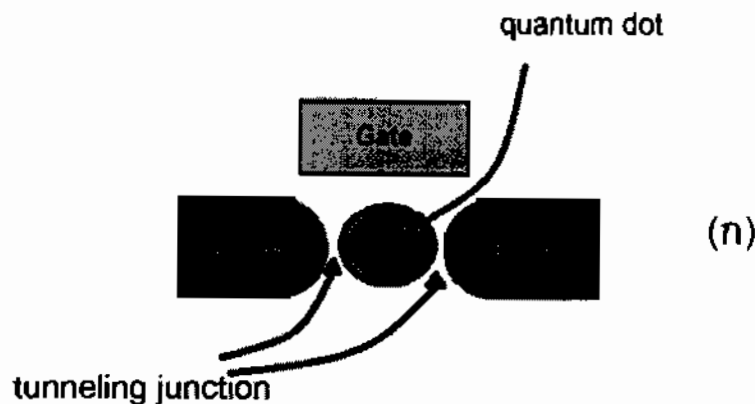
รูปที่ 2.4 ประจุเฉลี่ยในกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยเส้นทึบแสดงผลการทดลองที่อุณหภูมิค่าต่างๆ และเส้นประแสดงค่าที่คำนวณจากทฤษฎีแบบดั้งเดิม [7]

จากที่กล่าวมาข้างต้น แสดงให้เห็นว่าเราสามารถสร้างอุปกรณ์ที่ควบคุมอิเล็กตรอนให้เพิ่มขึ้นหรือลดลงทีละหนึ่งตัวได้โดยอาศัยปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ แต่บริเวณที่อุณหภูมิต่ำๆ กล่าวคือค่า $E_C \gg k_B T$ ทฤษฎีแบบดั้งเดิมยังไม่สามารถอธิบายผลการทดลองได้ถูกต้อง ดังนั้นโครงการนี้ได้นำเอาการคำนวณโดยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โลมาอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 3

2.3 ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงกล่องอิเล็กตรอนเดี่ยวซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่ประกอบด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านเพียงหนึ่งรอยต่อ แต่หัวข้อนี้กล่าวถึงทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวซึ่งประกอบไปด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านสองรอยต่อ โดยสามารถเขียนแบบจำลองได้ดังรูปที่ 2.5 (ก) ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวประกอบไปด้วยรอยต่อของการทะลุผ่านสองรอยต่อ กล่าวคือรอยต่อที่อยู่ระหว่างขั้วซอร์สกับควอนตัมดอทและรอยต่อที่อยู่ระหว่างควอนตัมดอทกับขั้วเดรน โดยรอยต่อดังกล่าวมีคุณสมบัติเป็นทั้งตัวต้านทานและตัวเก็บประจุ ดังแสดงด้วยวงจรสมมูล (Equivalent Circuit) ในรูปที่ 2.5 (ข)

ขั้วซอร์สและขั้วเดรนถูกสร้างขึ้นเพื่อให้สามารถเชื่อมต่อกับแรงดันไฟฟ้าภายนอกได้ นอกจากนี้ ศักย์ไฟฟ้าสถิตของควอนตัมดอทสามารถปรับเปลี่ยนได้โดยการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าที่ขั้วเกต



รูปที่ 2.5 (ก) แบบจำลองของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว รูปที่ 2.5 (ข) เป็นวงจรสมมูลของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยแต่ละรอยต่อมีคุณสมบัติเป็นทั้งตัวต้านทานไฟฟ้าและตัวเก็บประจุ

ทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวถูกสร้างขึ้นให้อิเล็กตรอนสามารถทะลุผ่านได้เฉพาะรอยต่อที่อยู่ระหว่างขั้วซอร์สกับควอนตัมดอทและควอนตัมดอทกับขั้วเดรนเท่านั้น แต่รอยต่อที่อยู่ระหว่างขั้วเกตกับควอนตัมดอทถูกออกแบบให้มีความหนาแน่นของประจุอิเล็กตรอนไม่สามารถทะลุผ่านรอยต่อได้ เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ที่เกิดขึ้นในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว ให้พิจารณาค่าพลังงานที่ใช้เพิ่มประจุจำนวน n เข้าไปในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวมีค่าเป็น

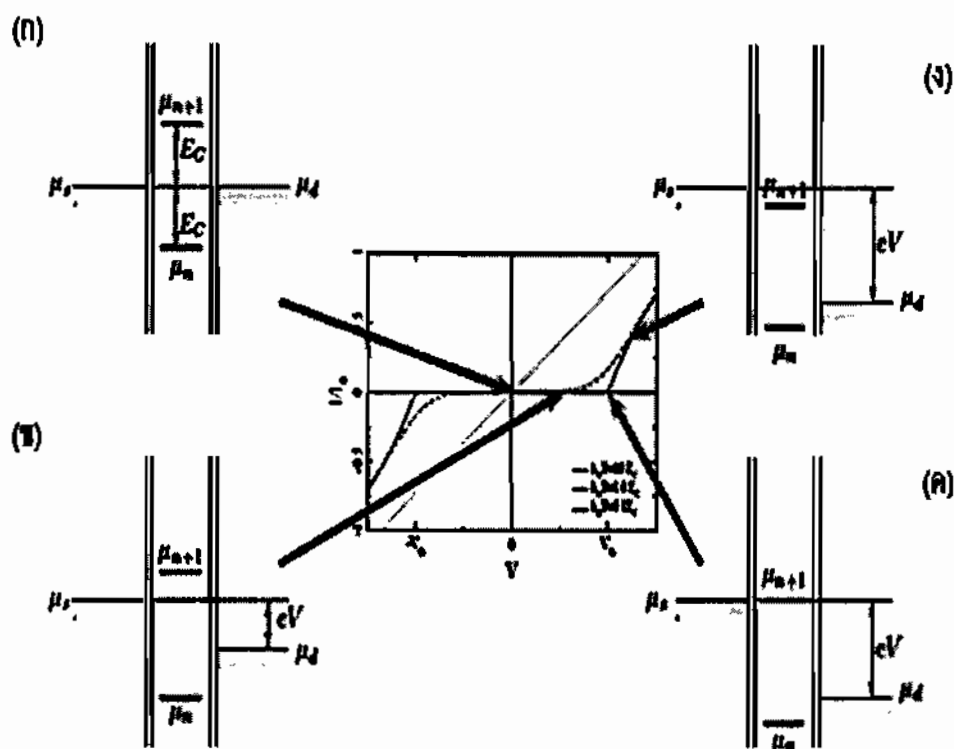
$$E_C(n) = \frac{e^2}{2C_\Sigma} (n - n_0)^2 \quad (2.11)$$

โดย $C_\Sigma = C_s + C_g + C_d$ เป็นค่าความจุไฟฟ้ารวมของระบบและ $n_0 = (C_g V_g + C_d V_d + C_s V_s) / e$ คือจำนวนประจุไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำเนื่องจากแรงดันไฟฟ้าจากภายนอก

ศักย์เคมี (Chemical Potential) ของควอนตัมดอทหมายถึงพลังงานที่น้อยที่สุดเมื่อมีการเพิ่มจำนวนอิเล็กตรอนลำดับที่ n เข้าไปในควอนตัมดอท

$$\mu(n) = E_c(n) - E_c(n-1) = \frac{e^2}{C_\Sigma} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) - \frac{C_g V_g}{e} - \frac{C_d V_d}{e} \right] \quad (2.12)$$

โดยสมการนี้กำหนดให้ระดับพลังงานเฟอร์มี (Fermi Level) ของซีลอร์สเป็นระดับพลังงานอ้างอิง จากสมการที่ (2.12) พบว่าพลังงานที่ต่อเนื่องของควอนตัมดอทชนิดโลหะถูกแยกออกเป็นช่วงขนาด e^2/C ด้วยอันตรกิริยาของแรงคูลอมบ์ จากสมการ (2.12) สามารถเขียนแผนภาพของแถบพลังงาน (Band Diagram) ของควอนตัมดอทชนิดโลหะได้ดังรูปที่ 2.6

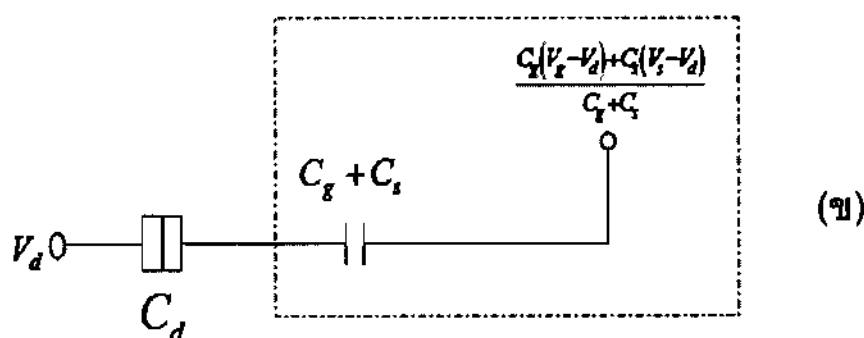
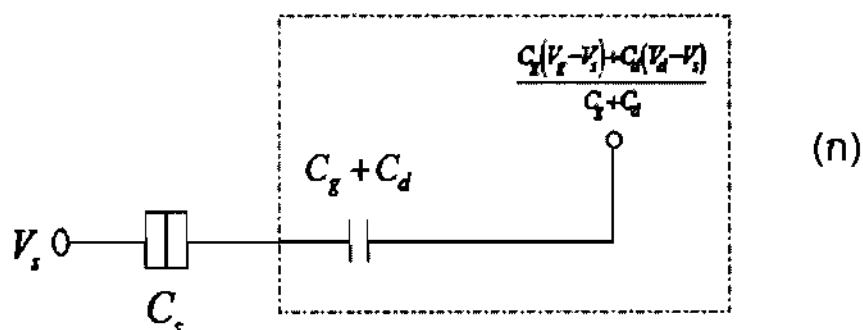


รูปที่ 2.6 (ก) (ข) (ค) และ (ง) ค่าศักย์เคมีของควอนตัมดอทที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อการเปลี่ยนแปลงแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมอยู่ระหว่างซีลอร์สและซีลเดรน ส่วนตรงกลางภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าและกระแสที่สอดคล้องกับแผนภาพของแถบพลังงาน [5]

พิจารณารูปที่ 2.6 (ก) เมื่อไม่มีแรงดันไฟฟ้า ระดับศักย์เคมีของควอนตัมดอทมีค่าเท่ากันตลอด ทำให้ไม่มีการถ่ายเทอิเล็กตรอนจนกว่าอิเล็กตรอนจะได้รับพลังงานเท่ากับพลังงานของการเพิ่มประจุ $E_c = e^2/2C$ รูปที่ 2.6 (ข) เป็นกรณีปรับแรงดันไฟฟ้าเพิ่มขึ้นแต่ยังไม่ถึงแรงดันไฟฟ้าขีดเริ่ม กล่าวคือพลังงานเฉลี่ยของอิเล็กตรอนที่ซีลอร์สมีค่าเพิ่มขึ้นแต่ยังไม่สูงมากพอที่จะทำให้อิเล็กตรอนทะลุผ่านไปยังควอนตัมดอทได้ จนกระทั่ง เมื่อค่าแรงดันไฟฟ้ามีค่าเท่ากับแรงดันไฟฟ้าขีดเริ่ม พลังงานของอิเล็กตรอนที่อยู่ในซีลอร์สจะมีค่าเท่ากับระดับศักย์เคมีของควอนตัมดอท ดังแสดงในรูปที่ 2.5 (ค) ซึ่ง

ทำให้อิเล็กตรอนสามารถเคลื่อนที่ผ่านไปยังควอนตัมดอทได้ เมื่อปรับแรงดันไฟฟ้าให้มีค่าเกินแรงดันไฟฟ้าขีดเริ่ม ดังแสดงในรูปที่ 2.5 (ง) ศักย์เคมีของควอนตัมดอทจะอยู่ต่ำกว่าศักย์เคมีของซัวซอร์ส ดังนั้นอิเล็กตรอนจะสามารถทะลุผ่านควอนตัมดอทไปได้และระดับนี้จะถูกเติมเต็มในที่สุด แต่อย่างไรก็ตามเมื่อต้องการเพิ่มอิเล็กตรอนตัวใหม่เข้าไปในควอนตัมดอทจะต้องให้พลังงานเท่ากับค่าพลังงานการเพิ่มประจุกล่าวคือระบบจะกลับไปเริ่มต้นที่รูป 2.6 (ก) อีกครั้งหนึ่ง แต่อย่างไรก็ตามปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์จะถูกทำลายด้วยผลของการกวัดแกว่งเนื่องจากความร้อน (Thermal Fluctuation) เมื่ออุณหภูมิมีค่ามากขึ้นกล่าวคือ $k_B T \gg E_C$ ยกตัวอย่างเช่น $k_B T = 10 E_C$ จะไม่สามารถสังเกตเห็นปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ได้ แต่ที่บริเวณอุณหภูมิต่ำๆ เช่น $k_B T = 0.1 E_C$ สามารถสังเกตเห็นปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ได้ชัดเจน

เพื่อคำนวณหาเงื่อนไขของการเกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ให้พิจารณาจากวงจรสมมูลของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวในรูปที่ 2.5 (ก) และ (ข) จากนั้นใช้ทฤษฎีเทเวนินเพื่อเขียนวงจรสมมูลให้สอดคล้องกับวงจรสมมูลของกล่องอิเล็กตรอน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.2 (ข) โดยวิธีการนี้สามารถเขียนแผนภาพความเสถียร (Stability Diagram) ของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวได้ซึ่งแผนภาพดังกล่าวแสดงเงื่อนไขของการเกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์



รูปที่ 2.7 (ก) วงจรสมมูลที่ได้จากการใช้ทฤษฎีเทเวนินที่รอยต่อของการทะลุผ่านที่ซัวซอร์ส และ (ข) วงจรสมมูลที่ได้จากการใช้ทฤษฎีเทเวนินที่รอยต่อของการทะลุผ่านที่ซัวซัวเร้น [8]

แผนภาพเสถียรของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวถูกสร้างขึ้นโดยอาศัยทฤษฎีเทเวนินเพื่อลดรูประบบของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวไปสู่ระบบกล่องอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวเพื่อใช้เงื่อนไขในสมการที่ (2.9) จากรูปที่ 2.5 (ข) เมื่อเปิดวงจร (Open Circuit) ตรงบริเวณรอยต่อของการทะลุผ่านซึ่งติดกับขั้วซอร์ส เมื่อมองออกจากควอนตัมดอทพบว่าค่าความจุไฟฟ้าของขั้วเกตและขั้วเดรนต่อแบบขนานกันอยู่ และมีค่าแรงดันไฟฟ้าของเทเวนิน เป็นไปตามสมการ

$$V_{th}^s = \frac{C_g(V_g - V_s) + C_d(V_d - V_s)}{C_g + C_d} \quad (2.13)$$

เมื่อนำไปแทนในสมการ (2.9) ทำให้ได้เงื่อนไขของการเพิ่มประจุ n เป็นดังสมการ

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{e}{C_g + C_d} < \frac{C_g(V_g - V_s) + C_d(V_d - V_s)}{C_g + C_d} < \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{e}{C_g + C_d} \quad (2.14)$$

ในทำนองเดียวกันโดยอาศัยทฤษฎีเทเวนิน รูปที่ 2.5 (ข) เมื่อเปิดวงจรที่บริเวณรอยต่อของการทะลุผ่านซึ่งติดกับขั้วเดรน เมื่อมองออกจากควอนตัมดอทพบว่าค่าความจุไฟฟ้าของขั้วเกตและขั้วซอร์สมีการต่อแบบขนาน และมีค่าแรงดันไฟฟ้าของเทเวนินเป็นไปตามสมการ

$$V_{th}^d = \frac{C_g(V_g - V_d) + C_s(V_s - V_d)}{C_g + C_s} \quad (2.15)$$

เมื่อนำไปแทนในสมการ (2.9) จะได้เงื่อนไขของการเพิ่มประจุ n เป็นไปตามสมการ

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{e}{C_g + C_s} < \frac{C_g(V_g - V_d) + C_s(V_s - V_d)}{C_g + C_s} < \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{e}{C_g + C_s} \quad (2.16)$$

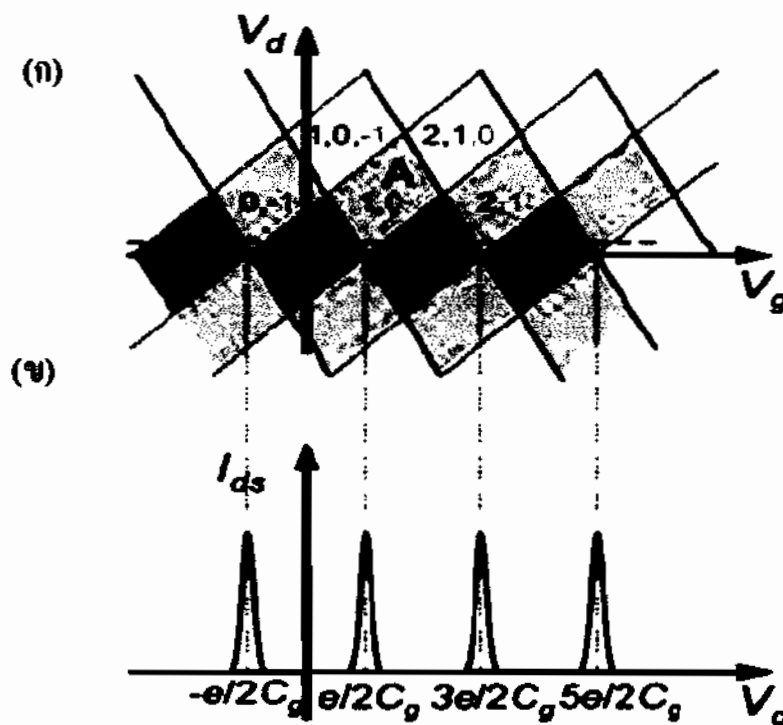
จากสมการที่ (2.13) และ (2.15) ถ้ากำหนดให้ $V_s = 0$ สมการจะถูกลดรูปลงเป็น

$$\frac{1}{C_d} \left(ne - \frac{e}{2} - C_g V_g \right) < V_d < \frac{1}{C_d} \left(ne + \frac{e}{2} - C_g V_g \right) \quad (2.17)$$

และ

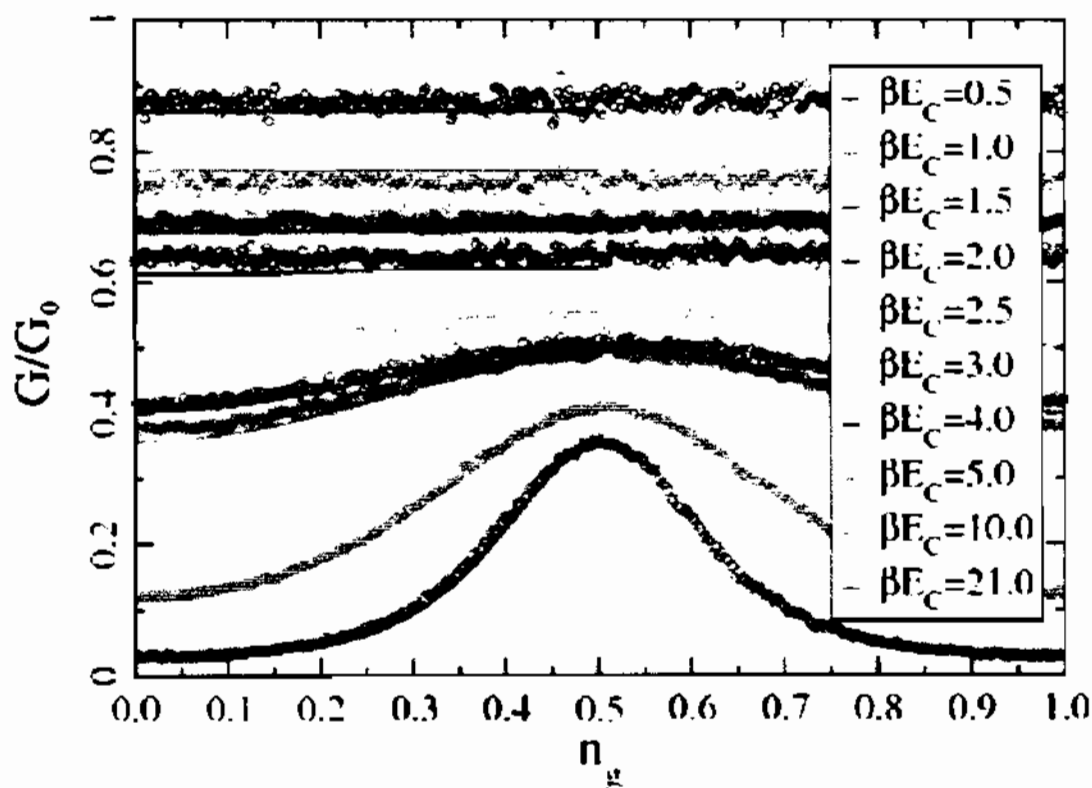
$$\frac{1}{C_s + C_g} \left(-ne - \frac{e}{2} + C_g V_g \right) > V_d > \frac{1}{C_s + C_g} \left(-ne - \frac{e}{2} - C_g V_g \right) \quad (2.18)$$

จากสมการที่ (2.17) และ (2.18) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วเกรน V_d และแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วเกต V_g ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.8 (ก) โดยเส้นสีแดงมาจากสมการ (2.17) และเส้นสีน้ำเงินมาจากสมการ (2.18) พบว่าเส้นทั้งสองตัดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ซึ่งบริเวณสีเทา คือบริเวณที่เกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ (ส่วนบริเวณสีเขียวเป็นกรณีที่มีความต่างศักย์ระหว่างขั้วซอร์สและเกรน V_d มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าศูนย์ แต่ในโครงงานนี้พิจารณาเฉพาะกรณี V_d มีค่าประมาณศูนย์เท่านั้น) โดยที่ตัวเลขแทนจำนวนอิเล็กตรอนที่ทะลุผ่านทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาบริเวณที่ (0) เป็นจุดเริ่มต้นที่ยังไม่มีอิเล็กตรอนอยู่ในควอนตัมดอท (บริเวณสีเทาขอบจุดกำเนิด) เมื่อให้แรงดันไฟฟ้าคงที่ V_d พบว่าจำนวนอิเล็กตรอนที่อยู่ในควอนตัมดอทเป็นศูนย์ จนกระทั่งแรงดันไฟฟ้ามีค่า $V_g = e/2C_g$ อิเล็กตรอนในควอนตัมดอทจึงเพิ่มขึ้นเป็นหนึ่งตัว และอิเล็กตรอนดังกล่าวสามารถทะลุผ่านไปยังขั้วเกรนได้ทันที ซึ่งทำให้ในควอนตัมดอทไม่มีอิเล็กตรอนค้างอยู่ โดยระยะเวลาที่ใช้ในการทะลุผ่านของอิเล็กตรอนสั้นมากๆ จากปรากฏการณ์นี้พบว่า กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวสามารถสังเกตได้จากคาบของ I_{ds} เทียบกับ V_g ซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 2.8 (ข) ปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์นั่นเอง



รูปที่ 2.8 (ก) แผนภาพความเสถียรของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยบริเวณสีเทา คือบริเวณที่เกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ (ข) ปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ที่เกิดขึ้นโดยสังเกตได้จากลักษณะเป็นคาบของกระแส I_{ds} เมื่อ V_g มีค่าเพิ่มมากขึ้น [8]

ในลำดับต่อไปขอลกล่าวถึงผลการทดลองของปรากฏการณ์ขีดขวางแบบคูลอมบ์ ในรูปที่ 2.9 เมื่ออุณหภูมิมีค่าสูงในที่นี้หมายถึงกรณีที่ $\beta E_C < 1$ ยกตัวอย่างเช่น $\beta E_C = 0.5$ จะไม่สามารถสังเกตเห็นปรากฏการณ์การขีดขวางแบบคูลอมบ์แต่ที่บริเวณอุณหภูมิต่ำในที่นี้หมายถึง $\beta E_C > 1$ เช่น $\beta E_C = 21$ พบว่าสามารถสังเกตเห็นปรากฏการณ์ขีดขวางแบบคูลอมบ์ซึ่งสังเกตได้ชัดเจน นอกจากนี้รูปที่ 2.9 ยังแสดงการเปรียบเทียบผลการทดลองซึ่งแสดงด้วยจุดกับผลการคำนวณโดยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล (Quantum Monte Carlo Method) ซึ่งแทนด้วยเส้น พบว่าทุกช่วงของอุณหภูมิวิธีการประมวลผลแบบควอนตัมมอนติคาร์โลสามารถอธิบายผลการทดลองได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 2.9 ค่าความนำไฟฟ้าของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว ที่อุณหภูมิต่ำๆ ปรากฏการณ์ขีดขวางแบบคูลอมบ์สามารถสังเกตเห็นได้ชัดเจน โดยจุดแสดงผลจากการทดลองและเส้นที่แสดงผลที่ได้จากการคำนวณโดยควอนตัมวิธีมอนติคาร์โล [5]

2.4 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์อิเล็กตรอนเดี่ยว (Average Charge Number on a Single Electron Transistor)

สำหรับทรานซิสเตอร์อิเล็กตรอนเดี่ยวซึ่งประกอบไปด้วยควอนตัมดอทหนึ่งควอนตัมดอทนั้น สามารถคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย ได้ตามสมการ [9]

$$\langle n \rangle = n_g + \frac{1}{2\beta E_C} \frac{\partial \ln Z}{\partial n_g} \quad (2.19)$$

โดยที่ $\beta = (k_B T)^{-1}$ และ Z คือพาร์ทิชันฟังก์ชัน (Partition Function) ซึ่งถูกนิยามด้วยสมการ

$$Z = \text{tr} \{ \exp(-\beta H) \} \quad (2.20)$$

จากงานวิจัยของ C.Theis [5] ได้คำนวณค่าพาร์ทิชันฟังก์ชันของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวเป็นไปตามสมการ

$$Z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(0)+2\pi k} D\varphi e^{-S[\varphi]} \quad (2.21)$$

โดยที่ $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(0)+2\pi k} D\varphi \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(0)+2\pi k} d\varphi_p \dots \int_{\varphi(0)}^{\varphi(0)+2\pi k} d\varphi_1$ และ N เป็นค่าคงที่ (Normalized Factor)

เมื่อ $S[\varphi] = S_C[\varphi] + S_T[\varphi]$ โดยที่ค่าคูลอมบ์แอกชัน (Coulomb Action) แสดงได้ดังสมการ

$$S_C[\varphi] = \int_0^{\beta E_C} d\tau \left[\frac{\dot{\varphi}^2}{4} + i n_g \dot{\varphi}(\tau) \right] \quad (2.22)$$

และค่าแอกชันของการทะลุผ่าน (Tunneling Action) เป็นไปตามสมการ

$$S_T[\varphi] = -g \int_0^{\beta E_C} d\tau \int_0^{\beta E_C} d\tau' \alpha(\tau - \tau') \cos(\varphi(\tau) - \varphi(\tau')) \quad (2.23)$$

เมื่อ $g = 2\pi G_d / e^2$ โดย G_d หมายถึงค่าผลรวมของความนำของรอยต่อทั้งสองที่ต่ออนุกรมกันและ

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{4(\beta E_C)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{\beta E_C} \tau\right)} \quad (2.24)$$

จากสมการที่ (2.19) พบว่าเมื่อแทนค่าพาร์ทิชันฟังก์ชันลงในสมการที่ (2.21) สมการที่ (2.19) จะได้

$$\langle n \rangle = n_g - \frac{1}{2\beta E_C} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{Z} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(0)+2\pi k} D\varphi e^{-S[\varphi]} \left[\int_0^{\beta E_C} d\tau \left(i \dot{\varphi}(\tau) \right) \right] \quad (2.25)$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณด้วยวิธีการควอนตัมมอนติคาร์โล ให้เปลี่ยนตัวแปรในการประมวลผลตามสมการ

$$\varphi(\tau) = \varsigma(\tau) + v_k \tau \quad \text{เมื่อ} \quad v_k = \frac{2\pi k}{\beta E_C} \quad (2.26)$$

ดังนั้น

$$\langle n \rangle = n_g - \frac{1}{2\beta E_C} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{Z} \int_{\varsigma(0)}^{\varsigma(\beta E_C)} D\varsigma e^{-S[\varsigma]} \int_0^{\beta E_C} i d\tau \left(\dot{\varsigma}(\tau) + v_k \right) \quad (2.27)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $\int d\tau \dot{\varsigma}(\tau) = \varsigma(\beta E_C) - \varsigma(0) = 0$ ดังนั้นจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวสามารถเขียนใหม่ได้ตามสมการ

$$\langle n \rangle = n_g - \frac{i\pi \langle k \rangle}{\beta E_C} \quad (2.28)$$

โดยที่ค่าเฉลี่ยของ k (Winding Number) นิยามตามสมการ

$$\langle k \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\varsigma(0)}^{\varsigma(\beta E_C)} D\varsigma k e^{-S[\varsigma]} \quad (2.29)$$

ในบทต่อไปจะแสดงวิธีการคำนวณค่าเฉลี่ยในสมการที่ (2.29) โดยวิธีการควอนตัมมอนติคาร์โล

บทที่ 3

วิธีการทดลอง

ในหัวข้อที่ 3.1 และ 3.2 ได้กล่าวถึงหลักการเบื้องต้นในการคำนวณค่าปริพันธ์โดยวิธีมอนติคาร์โล เพื่อนำไปสู่การประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวในการคำนวณปริมาณทางควอนตัมในหัวข้อที่ 3.3 ส่วนวิธีการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.4 ส่วนในหัวข้อที่ 3.5 และ 3.6 ได้กล่าวถึงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซด์อัลเทรและระเบียบวิธีฟูเรียร์อัลเทรเพื่อคำนวณค่าจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ย ตามลำดับ

3.1 วิธีการมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method)

เพื่ออธิบายการประยุกต์ใช้วิธีการควอนตัมมอนติคาร์โล (Quantum Monte Carlo Method) ในการคำนวณค่าอิเล็กตรอนเฉลี่ยตามสมการที่ (2.28) ให้พิจารณาการหาค่าปริพันธ์ในหลายมิติของฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_d)$ โดยใช้วิธีการมอนติคาร์โลกำหนดให้ ค่า d หมายถึงจำนวนตัวแปรของการหาค่าปริพันธ์ ในการคำนวณค่า

$$I = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_d f(x_1, \dots, x_d) \quad (3.1)$$

โดยที่แต่ละตัวแปรในช่วงของการหาปริพันธ์เป็น $(0,1)$ ในการที่ (3.1) สามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีของนิวตันและโคตส์ (Newton Cotes Formula) [10] โดยวิธีดังกล่าว ค่าปริพันธ์ที่คำนวณได้มีค่าความคลาดเคลื่อนแปรผันตรงกับจำนวนของตัวแปรของฟังก์ชัน กล่าวคือค่า d ดังนั้นเมื่อจำนวนตัวแปรของฟังก์ชันมีค่ามาก วิธีของนิวตันและโคตส์จะให้ค่าปริพันธ์ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนมากตามไปด้วย วิธีของนิวตันและโคตส์จึงไม่เหมาะสมสำหรับการหาค่าปริพันธ์หลายมิติ แต่ในการคำนวณค่าปริพันธ์โดยวิธีมอนติคาร์โล ค่าความคลาดเคลื่อนไม่ขึ้นอยู่กับค่า d ดังต่อไปนี้ ในการคำนวณหาค่าปริพันธ์หลายมิติในสมการที่ (3.1) เพื่อความสะดวกกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_d) \equiv f(\vec{X})$ โดยวิธีมอนติคาร์โลสามารถคำนวณหาค่าปริพันธ์ในสมการที่ (3.1) ได้ดังสมการนี้

$$I = \int_0^1 d\vec{X} f(\vec{X}) \rho(\vec{X}) = \langle f \rangle_\rho \approx \frac{1}{M} \sum_{\substack{i=1 \\ \vec{X}_i \in \rho(\vec{X})}}^M f(\vec{X}_i) \quad (3.2)$$

โดยที่เครื่องหมาย $\langle f \rangle_\rho$ หมายถึงค่าคาดหวัง (Expectation Value) ของฟังก์ชัน $f(\vec{X})$ และฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\rho(\vec{X})$ (Probability Distribution Function) ตามสมการที่ (3.2) ต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. ความน่าจะเป็นของทุกค่า $\vec{X}$ ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ กล่าวคือ

$$\rho(\vec{X}) \geq 0 \quad (3.3)$$

2. ผลรวมของความน่าจะเป็นที่ทุกค่า $\vec{X}$ ต้องมีค่าเท่ากับหนึ่งดังสมการ

$$\int_0^1 d\vec{X} \rho(\vec{X}) = 1 \quad (3.4)$$

จากสมการ (3.2) เครื่องหมาย $\vec{X}_i \in \rho(\vec{X})$ หมายถึงการเลือกกลุ่มค่า $\vec{X}$ จากฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\rho(\vec{X})$ ในกรณีที่

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(\vec{X}_i) = I \quad (3.5)$$

เมื่อ M เป็นจำนวนของตัวอย่างสุ่ม แต่โดยทั่วไปในการคำนวณจำนวนของการสุ่ม M มีค่าจำกัด (Finite Number) ดังนั้นการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีการนี้จึงมีค่าความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเสมอ ในกรณีนี้สามารถคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standards Deviation) ตามทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) [11] ค่าความคลาดเคลื่อนในกรณีนี้สามารถคำนวณตามสมการ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{M} \left(\langle f^2 \rangle_\rho - \langle f \rangle_\rho^2 \right)} \quad (3.6)$$

ดังนั้นสามารถเขียนการหาปริพันธ์ในหลายมิติในสมการ (3.2) ใหม่ได้เป็น

$$\int_0^1 d(\vec{X}) f(\vec{X}) \rho(\vec{X}) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i=1 \\ \vec{X}_i \in \rho(\vec{X})}}^M f(\vec{X}_i) \pm \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\langle f^2 \rangle_\rho - \langle f \rangle_\rho^2 \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

จากสมการที่ (3.7) พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนของการหาปริพันธ์ โดยวิธีมอนติคาร์โลขึ้นอยู่กับจำนวนของตัวแปรสุ่ม M เท่านั้น ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนของการหาปริพันธ์ในกรณีนี้จึงไม่ขึ้นกับจำนวนตัวแปรของการหาปริพันธ์ นอกจากนี้วิธีดังกล่าวให้ค่าความคลาดเคลื่อนแปรผันตรงกับค่าส่วนกลับของรากที่สองของจำนวนตัวอย่าง เช่น ถ้าต้องการให้ค่าที่คำนวณได้มีความละเอียดเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งตำแหน่ง จำนวนของตัวอย่างที่สุ่มต้องเพิ่มขึ้นอีก 100 เท่า ตามสมการ (3.6) และ (3.7) ในลำดับต่อไปจะกล่าวถึงวิธีการเลือกฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\rho(\vec{X})$ ที่เหมาะสม

3.2 การสุ่มตัวอย่างแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Sampling)

ในโครงการนี้ ใช้การสุ่มตัวอย่างตามความสำคัญ (Importance Sampling) เพื่อให้การคำนวณเข้าสู่คำตอบอย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ยังใช้ระเบียบวิธีแบบเมโทรโพลิซิส (Metropolis Algorithm) [11] ในการสร้างตัวอย่างสุ่มเพื่อนำไปคำนวณในสมการที่ (3.2)

3.2.1 การสุ่มตัวอย่างตามความสำคัญ

การสุ่มตัวอย่างตามความสำคัญเป็นวิธีการเลือกฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นเพื่อที่จะเลือกสุ่มตัวอย่างเฉพาะบริเวณที่มีความสำคัญ โดยทั่วไปฟังก์ชัน $\rho(\vec{X})$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่สอดคล้องตามเงื่อนไขในสมการที่ (3.3) และ (3.4) แต่ถ้าใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างตามความสำคัญต้องเลือกตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$$I = \int d\vec{X} f(\vec{X}) = \int d\vec{X} \frac{f(\vec{X})}{\rho(\vec{X})} \rho(\vec{X}) = \left\langle \frac{f}{\rho} \right\rangle_{\rho} \quad (3.8)$$

จากสมการ (3.8) ค่าฟังก์ชัน $f(\vec{X})/\rho(\vec{X})$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าคาดหวัง ในกรณีนี้สามารถคำนวณหาค่าปริพันธ์โดยวิธีแบบมอนติคาร์โล ได้ดังสมการ

$$\left\langle \frac{f}{\rho} \right\rangle_{\rho} = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i=1 \\ \vec{X}_i \in \rho(\vec{X})}}^M \frac{f(\vec{X}_i)}{\rho(\vec{X}_i)} \pm \frac{\sigma_{(f/\rho)_{\rho}}}{\sqrt{M}} \quad (3.9)$$

โดยที่

$$\sigma_{(f/\rho)_{\rho}}^2 = \left\langle \left(\frac{f(\vec{X})}{\rho(\vec{X})} \right)^2 \right\rangle_{\rho} - \left\langle \frac{f(\vec{X})}{\rho(\vec{X})} \right\rangle_{\rho}^2 \quad (3.10)$$

จากสมการที่ (3.10) ถ้าเลือกใช้ค่า $\rho(\vec{X}) = f(\vec{X})/I$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าเป็นศูนย์ (ไม่มี ความคลาดเคลื่อน) แต่เนื่องจาก I เป็นคำตอบของการหาค่าปริพันธ์ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะสามารถทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ได้โดยวิธีการเลือกค่า $\rho(\vec{X})$ แต่อย่างไรก็ตาม สมการที่ (3.10) แสดงให้เห็นถึงหลักการเลือกฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น กล่าวคือ ควรเลือกฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\rho(\vec{X})$ ที่รูปร่างใกล้เคียงกับ $f(\vec{X})$ ให้มากที่สุด เพื่อทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุดซึ่งจะทำให้ค่าที่คำนวณได้ความน่าเชื่อถือและใกล้เคียงกับค่าจริง โดยเรียกวิธีการสุ่มแบบนี้ว่า วิธีการสุ่มตัวอย่างตามความสำคัญ

3.2.2 ระเบียบวิธีของเมโทรโพลิซิส (Metropolis Algorithm)

ในการสร้างลำดับของตัวอย่างสุ่มเลือก $\vec{X}$ สำหรับการคำนวณตามสมการที่ (3.2) มีหลายวิธีแต่ในที่นี้ขอกล่าวถึง กรณีการสุ่มแบบเมโทรโพลิซิส กำหนดค่าตัวอย่างสุ่ม $\vec{X}_1$ เป็นค่าเริ่มต้นใดๆ ในลำดับต่อไปสามารถหา $\vec{X}_2$ ตามการสุ่มของเมโทรโพลิซิส ซึ่งค่าความน่าจะเป็นในการเลือก $\vec{X}_2$ สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$A(\vec{X}_1 \rightarrow \vec{X}_2) = \min \left[1, \frac{\rho(\vec{X}_2)}{\rho(\vec{X}_1)} \right] \quad (3.11)$$

เมื่อ $A(\vec{X}_1 \rightarrow \vec{X}_2)$ คือความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจากค่า $\vec{X}_1$ ไปยังสถานะ $\vec{X}_2$ จากสมการ (3.11) สามารถเขียนแยกออกได้เป็น 2 กรณี

1. ถ้า $\rho(\vec{X}_2) \geq \rho(\vec{X}_1)$, $A(\vec{X}_1 \rightarrow \vec{X}_2) = 1$
2. ถ้า $\rho(\vec{X}_2) < \rho(\vec{X}_1)$, $A(\vec{X}_1 \rightarrow \vec{X}_2) = \frac{\rho(\vec{X}_2)}{\rho(\vec{X}_1)}$

ในกรณีที่ 1 ค่า $\vec{X}_2$ ถูกยอมรับทันที แต่ในกรณีที่ 2 เพื่อที่จะเลือกว่าเกิดการเปลี่ยนสถานะเป็น $\vec{X}_2$ หรือไม่ จำเป็นต้องเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่าง $\rho(\vec{X}_2)/\rho(\vec{X}_1)$ กับค่าตัวเลขสุ่ม (Random Number; R) ซึ่งอยู่ ในช่วง $[0,1]$ กล่าวคือถ้า $A(\vec{X}_1 \rightarrow \vec{X}_2) \geq R$ แล้วเลือกค่า $\vec{X}_2$ แต่ถ้า $A(\vec{X}_1 \rightarrow \vec{X}_2) < R$ ให้เลือกค่า $\vec{X}_1$ จากนั้นให้ทำการสุ่มค่า $\vec{X}_2$ ขึ้นมาใหม่อีกครั้งเพื่อมาเปรียบเทียบตามสมการที่ (3.11) และทำซ้ำจนกว่าจะได้ค่า $\vec{X}_M$ ตามที่ต้องการ

3.3 วิธีควอนตัมมอนติคาร์โล (Quantum Monte Carlo Method)

ตามทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมของฟายน์แมน (Feynman's Quantum Mechanics) [12] พาร์ทิชันฟังก์ชัน (Partition Function) ของระบบทางควอนตัมใดๆ สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$Z(\beta) = \oint D\phi e^{-S[\phi]} \quad (3.12)$$

โดยสัญลักษณ์ $\oint D\phi$ หมายถึงผลรวมของทุกเส้นทางปิดกล่าวคือ $\phi(0) = \phi(\beta)$ และ $\beta = (k_B T)^{-1}$ ค่า
แอคชัน $S[\phi(\tau)]$ หมายถึงแอคชันของเส้นทางแบบยูคลิด (Euclidean Action) กล่าวคือ แอคชันที่
เขียนอยู่ในเทอมเวลาจินตภาพ นิยามตามสมการ

$$S[\phi(\tau)] = \int_0^\beta d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{\phi}^2(\tau) - V(\phi(\tau)) \right] \quad (3.13)$$

เมื่อ $\phi(\tau)$ หมายถึงเส้นทางของอนุภาคในเวลาจินตภาพและ $\dot{\phi}(\tau) = d\phi(\tau)/d\tau$ นอกจากนี้ค่า
คาดหวังของตัวดำเนินการใดๆ สามารถคำนวณได้ตามสมการ

$$\langle \hat{O} \rangle = \oint D[\phi] \hat{O}[\phi(\tau)] \rho[\phi(\tau)] \quad (3.14)$$

เมื่อตัวดำเนินการ $\hat{O}$ ถูกเขียนให้อยู่ในเทอมของเส้นทางของอนุภาคและ $\rho(\phi)$ ถูกนิยามตามสมการ

$$\rho[\phi(\tau)] = \frac{1}{Z} e^{-S[\phi(\tau)]} \quad (3.15)$$

โดย $\rho[\phi(\tau)]$ ถูกตีความเป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของระบบทางควอนตัม

3.3.1 การสุ่มตัวอย่างของเส้นทางจินตภาพ (Imaginary Path Sampling)

เส้นทางในเวลาจินตภาพใดๆ สามารถแบ่งออกเป็นช่วงได้ตามรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ตัวอย่างการแบ่งเส้นทางจินตภาพออกเป็น 10 ช่วงเท่าๆกัน [13]

รูปที่ 3.1 แสดงตัวอย่างของเส้นทางที่ถูกแบ่งออกเป็น 10 ช่วงเท่าๆกันกล่าวคือ $N = 10$ จากรูปพบว่าเส้นทางที่ต่อเนื่อง (Continuous Path) สามารถประมาณด้วยจุดจำนวนมากคล้ายกับการร้อยลูกปัด ดังนั้นในการคำนวณสมการ (3.14) สามารถคำนวณได้ตามวิธีการในหัวข้อ 3.2 กล่าวคือ

$$\langle \hat{o} \rangle \approx \frac{1}{M} \sum_{\substack{j=1 \\ \phi_j \in \rho[\phi]}}^M \hat{o}[\phi_j] \quad (3.16)$$

เมื่อ M หมายถึงจำนวนของตัวอย่างสุ่มที่ถูกเลือกจากฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $\rho[\phi]$ ของค่าความน่าจะเป็นของการการยอมรับ (Acceptance Probability) ซึ่งค่านี้สามารถเขียนได้ตามสมการ

$$A(\phi_{\text{in}} \rightarrow \phi_{\text{new}}) = \frac{\rho[\phi_{\text{new}}]}{\rho[\phi_{\text{in}}]} = \frac{e^{-S[\phi_{\text{new}}]}}{e^{-S[\phi_{\text{in}}]}} = e^{-\Delta S} \quad (3.17)$$

เมื่อ ϕ_{in} และ ϕ_{new} เป็นเส้นทางเริ่มต้นและเส้นทางใหม่ตามลำดับ จากสมการที่ (3.17) พบว่าในการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการเลือกตัวอย่างไม่จำเป็นต้องทราบค่าพหุคูณฟังก์ชัน Z ซึ่งไม่สามารถคำนวณได้แต่โดยวิธีของเมโทรโพลิซิสต้องการทราบเพียงผลต่างระหว่างค่าเอกซันชันตอนของวิธีเมโทรโพลิซิสสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$A(\phi_{\text{in}} \rightarrow \phi_{\text{new}}) = \min[1, e^{-\Delta S}] \quad (3.18)$$

จากสมการที่ (3.18) สามารถสร้างเส้นทางใหม่ได้ดังนี้

1. เริ่มจากเส้นทางของอนุภาคใดๆ $\phi[r]$ จากนั้นเปลี่ยนเส้นทางดังกล่าวไปเล็กน้อยและเรียกว่าเส้นทางดังกล่าวว่าเส้นทางเดินใหม่
2. คำนวณค่า $\Delta S = S[\phi_{\text{new}}] - S[\phi_{\text{in}}]$
3. ถ้า $\Delta S \leq 0$ เส้นทางใหม่ถูกยอมรับทันที
4. ถ้า $\Delta S > 0$ ให้สร้างตัวเลขสุ่มที่อยู่ในช่วง 0 ถึง 1, $R \in [0,1]$ ขึ้นมาหนึ่งค่า

แล้วนำไปเปรียบเทียบกับค่า $e^{-\Delta S}$ ถ้า $R > e^{-\Delta S}$ แล้วให้ยอมรับเส้นทางใหม่นั้น แต่ถ้า $R \leq e^{-\Delta S}$ แล้วให้เลือกใช้เส้นทางเดิม ϕ_{in}

5. ให้กลับทำซ้ำตามข้อ 1 ถึง 4 จนกว่าจะได้ตัวอย่างทั้งหมด $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_M\}$ ตามจำนวนที่ต้องการ

3.3.2 ระเบียบวิธีฟูเรียร์มอนติคาร์โล (Fourier Monte Carlo Algorithm) [6,13]

จากหัวข้อที่ผ่านมาตัวอย่างของการสุ่มสามารถสร้างใหม่ได้โดยการเปลี่ยนแปลงตัวอย่างเดิมไปเล็กน้อยแล้วตรวจสอบโดยใช้วิธีของเมโทโพลิสว่าจะยอมรับตัวอย่างใหม่หรือไม่เนื่องจากเส้นทางเปลี่ยนแปลงไปเล็กน้อย ดังนั้นในการสุ่มตัวอย่างเพื่อให้ครอบคลุมเกือบทุกสถานะที่เป็นไปได้ จึงใช้เวลาในการประมวลผลมาก

ในหัวข้อนี้ได้กล่าวถึงวิธีการสุ่มตัวอย่างด้วยการสุ่มตัวอย่างของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ โดยเริ่มจากการแปลงแอกชันที่อยู่ในรูปเวลาจินตภาพ (Imaginary Time) ให้อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ยกตัวอย่างเช่น $\phi(\tau)$ โดยจากนั้นเขียนให้อยู่ในรูปสมการ

$$\phi(\tau) = \phi_0 + (\phi_f - \phi_0) \frac{\tau}{\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi\tau}{\beta}\right) \quad (3.19)$$

โดยที่ $\phi(\tau=0) = \phi_0$ จุดสิ้นสุด $\phi(\tau=\beta) = \phi_f$ และ a_k หมายถึง สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Fourier Coefficient) ลำดับที่ k ดังนั้น $S(\tau)$ สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $\{a_k\}$ Fourier Coefficient [4] ได้ เมื่อ N มีค่าจำกัด สมการที่ (3.19) สามารถประมาณได้เป็น

$$\phi_j \approx \sum_{k=1}^N a_k \sin\left(\frac{k\pi j}{N}\right) \quad (3.20)$$

เมื่อ

$$a_k = \sum_{j=1}^N \phi_j \sin\left(\frac{k\pi j}{N}\right) \quad (3.21)$$

สมการ (3.20) และ (3.21) ได้มาจากการแบ่งช่วง $(0, \beta)$ เป็นจำนวน N ช่วง ซึ่งมีความกว้างเท่ากับ $\Delta\tau$ และใช้สัญลักษณ์ $\phi(\tau_j) = \phi_j$ เมื่อ $\tau_j = j\Delta\tau$ ในกรณีนี้กำหนดให้ $\phi(0) = \phi(\beta) = 0$ พจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของสมการ (3.19) จึงมีค่าเป็นศูนย์ สมการที่ (3.19) จึงลดรูปเป็นสมการแบบการแปลงแบบไซน์ (Sine Transform) ในกรณีที่แอกชันของระบบใดๆ ถูกเขียนให้อยู่ให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์แล้ว กล่าวคือ $S[\phi_j] \rightarrow S[a_k]$ สามารถใช้การสุ่มแบบเมโทโพลิสในการสุ่มตัวอย่างจากเซตของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $\{a_k\}$ แทนการสุ่มตัวอย่างจาก $\{\phi_j\}$ ที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ผ่านมา

3.4 การคำนวณค่าเฉลี่ยของประจุโดยใช้วิธีการมอนติคาร์โล

(Calculation of Average Charge Number by Monte Carlo Method)

ในหัวข้อนี้ได้กล่าวถึงการคำนวณค่าเฉลี่ยของประจุในทรานซิสเตอร์อิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว โดยใช้วิธีการมอนติคาร์โล เพื่อความสะดวกในการประมวลผลผลงานทั้งหมดถูกเขียนให้อยู่ในหน่วยของ E_c และของค่าแอกชันถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่องค่าตัวแปรของการสุ่มถูกเขียนใหม่ดังสมการ

$$\varphi(\tau) = \xi(\tau) + v_k \tau \quad (3.22)$$

เมื่อ

$$v_k = \frac{2\pi k}{\beta E_c} \quad (3.23)$$

ดังนั้นค่าแอกชันของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวเป็นไปตามสมการ

$$S_c[\zeta, k] = \int_0^{\beta E_c} d\tau \left[\frac{1}{4} \left(\dot{\zeta}(\tau) + v_k \right)^2 + i n_g v_k \right] \quad (3.24)$$

และแอกชันของการทะลุผ่านสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$S_I[\zeta] = -g \int_0^{\beta E_c} d\tau \int_0^{\beta E_c} d\tau' \alpha(\tau - \tau') \cos(\varphi(\tau) - \varphi(\tau') + v_k(\tau - \tau')) \quad (3.25)$$

เมื่อ

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{4(\beta E_c)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{\beta E_c} \tau\right)} \quad (3.26)$$

จากสมการ (2.29) ค่าคาดหวังของจำนวนไว้งัดเฉลี่ยของจำนวนรอบของการปริพันธ์ (Winding Number) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\langle k \rangle = \frac{\left\langle e^{-2\pi i n_g k} \right\rangle_0}{\left\langle e^{-2\pi i n_g k} \right\rangle_0} \quad (3.27)$$

เมื่อ

$$\langle k \rangle_0 \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{Z} \int_{c(0)}^{c(\beta E_c)} D\zeta \, k \, e^{-S_0[\zeta, k]} \quad (3.28)$$

โดย $S_0[\zeta, k]$ เป็นค่าเอกซันที่เลือกเฉพาะค่าที่เป็นบวกเท่านั้นเพื่อใช้เป็นฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นของระบบกล่าวคือ

$$S_0[\zeta, k] = \int_0^{\beta E_c} d\tau \frac{1}{4} \left(\dot{\zeta}^2(\tau) + v_k^2 \right) - g \int_0^{\beta E_c} d\tau \int_0^{\beta E_c} d\tau' \alpha(\tau - \tau') \cos(\varphi(\tau) - \varphi(\tau') + v_k(\tau - \tau')) \quad (3.29)$$

ในลำดับต่อไปสมการที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณด้วยวิธีมอนติคาร์โลต้องถูกเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง โดยการแบ่งช่วง $[0, \beta E_c]$ เป็น N ช่วง มีความกว้าง $\Delta\tau$ เมื่อ $\tau_j = j\Delta\tau$ และกำหนดให้สัญลักษณ์ $\zeta_j \equiv \zeta(\tau_j)$ ดังนั้นสมการของเอกซัน S_0 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$S_0[\zeta, k] \approx N \sum_{j=1}^N \frac{N(\zeta_j - \zeta_{j-1})^2}{4\beta E_c} + \frac{\pi^2 k^2}{\beta E_c} - g \sum_{j, j'=1}^N \alpha_{j-j'} \cos\left(\zeta_j - \zeta_{j'} + \frac{2\pi k}{P}(j - j')\right) \quad (3.30)$$

เมื่อ

$$\alpha_j = \frac{1}{4P^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{P} j\right)} \quad (3.31)$$

พิจารณากรณีที่ $j = j'$ ซึ่งทำให้ค่าเอกซันในสมการ (3.30) มีค่าไม่จำกัด ทำให้เกิดปัญหาในการประมวลผลดังนั้นกรณีนี้จึงถูกหาค่าก่อนทำการประมวลผลโดยกำหนดให้

$$\xi(\tau) = \frac{1}{2} \left(\zeta(\tau) - \zeta(\tau_j) + \frac{2\pi k}{\beta E_c} (\tau - \tau_j) \right) \quad \text{เมื่อ} \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_j} \xi(\tau) \quad (3.32)$$

ในกรณีที่ $\tau \rightarrow \tau_j$ สามารถคำนวณได้โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$ ที่เงื่อนไข $j - j' \approx 0$ พบว่า

$$\alpha_0 \sin^2 \left[\frac{\zeta_j - \zeta_j + \frac{2\pi k}{P} 0}{2} \right] = \lim_{\tau \rightarrow \tau_j} \frac{1}{2P^2} \frac{\sin^2[\xi(\tau)]}{\sin^2 \left[\frac{\pi}{\beta E_c} (\tau - \tau_j) \right]} = \frac{(\beta E_c)^2}{2\pi^2 P^2} \xi^2$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} [\zeta_j - \zeta_{j-1}]^2 + \frac{k}{2\pi P} [\zeta_j - \zeta_{j-1}] + \frac{1}{2P^2} k^2 \quad (3.33)$$

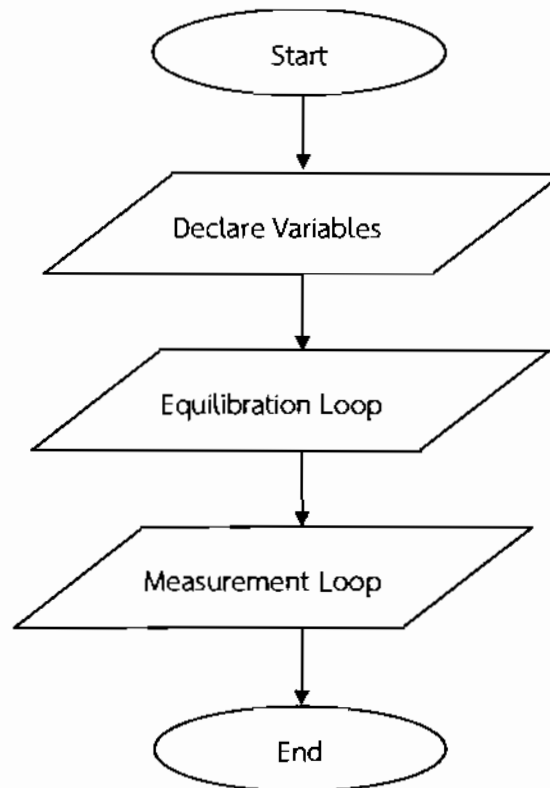
เมื่อแทนสมการที่ (3.33) ลงในสมการ (3.30) สามารถเขียนค่าแยกชั้นใหม่ได้เป็น

$$S_0[\zeta, k] = c_\zeta \sum_{j=1}^P [\zeta_j - \zeta_{j-1}]^2 + c_k k^2 - 2g \sum_{j < j'} \alpha_{j-j'} \cos\left(\zeta_j - \zeta_{j-1} + \frac{2\pi k}{P}(j - j')\right) \quad (3.34)$$

เมื่อค่าสัมประสิทธิ์

$$c_\zeta = \frac{P}{4\beta E_C} + \frac{g}{8\pi^2}, \quad c_k = \frac{\pi^2}{\beta E_C} + \frac{g}{2P} \quad \text{และ} \quad \alpha_j = \frac{1}{4P^2 \sin^2(\frac{\pi}{P} j)} \quad (3.35)$$

ดังนั้นในกรณี $j = j'$ สามารถจำกัดผลของการลู่ออก (Divergent) โดยใช้วิธีการดั่งที่กล่าวมาข้างต้น ในการคำนวณโดยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โลทั้งแบบซิงค์เกิลไซต์อัลเฟดและแบบการแปลงฟูเรียร์อัลเฟดมี ขั้นตอนในการคำนวณแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แผนผังการทำงานของโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่าเฉลี่ยของประจุโดยวิธีการมอนติคาร์โล

แต่อย่างไรก็ตามความแตกต่างของทั้งสองวิธีอยู่ที่ตัวแปรที่ใช้ในการสุ่มตัวอย่างดังจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

3.5 ระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดต (Single Site Update Algorithm)

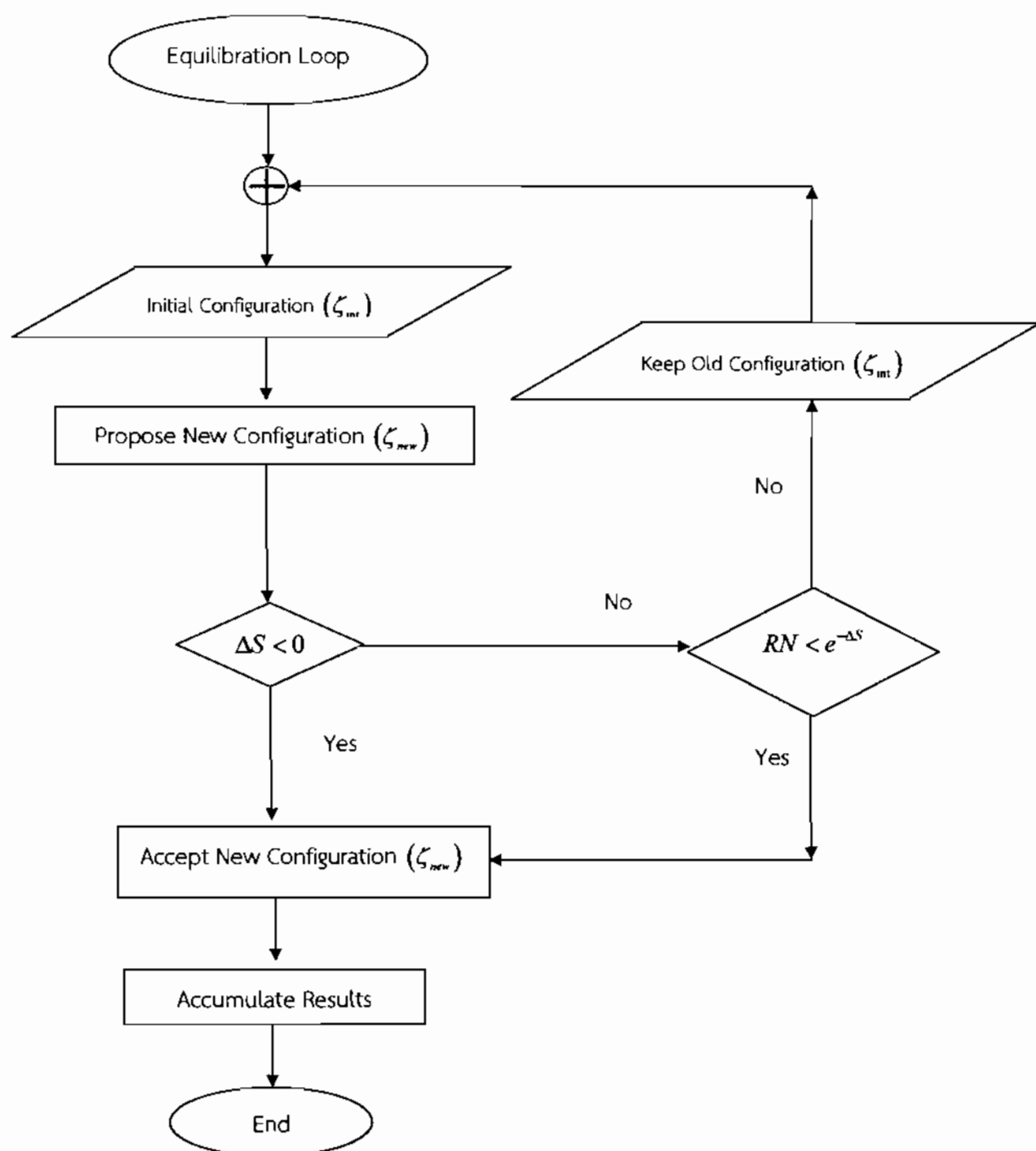
ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดตในการคำนวณค่าเฉลี่ยของประจุ เริ่มจากการเขียนแอกชันของทรานซิสเตอร์อิเล็กตรอนเดี่ยวให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่อง โดยแบ่งช่วงเวลาจินตภาพออกเป็น N ส่วน กล่าวคือ $\Delta\tau = \beta E_C / N$ โดยใช้ $\zeta_j = \zeta(\tau_j)$ กับ $\tau_j = j\Delta\tau$ จากนั้นประมาณการหาค่าปริพันธ์โดยใช้ผลบวกของรีมันน์ (Riemann's Sums) ค่าแอกชันนี้ถูกเขียนใหม่ได้

$$S_0[\zeta, k] = c_\zeta \sum_{j=1}^N [\zeta_j - \zeta_{j-1}]^2 + c_k k^2 - 2g \sum_{j < j'} \alpha_{j-j'} \cos\left(\zeta_j - \zeta_{j-1} + \frac{2\pi k}{N}(j - j')\right) \quad (3.36)$$

และค่าจำนวนประจุเฉลี่ยสามารถคำนวณได้ดังสมการ

$$\langle n \rangle = n_g - \frac{\pi}{\beta E_C} \frac{\sum_{k, \zeta} \sin(2\pi k n_g)}{\sum_{k, \zeta} \cos(2\pi k n_g)} \quad (3.37)$$

เมื่อ $\sum_{k, \zeta}$ หมายถึงการสุ่มทั้งตัวแปรเฟส (ζ) และตัวแปรของค่าไวน์ดิง (k) ส่วนเทอม $i\cos(2\pi k n_g)$ และเทอม $i\sin(2\pi k n_g)$ มีค่าเป็นศูนย์ตามคุณสมบัติของการปริพันธ์ของฟังก์ชันคี่ (odd function) ในโครงงานนี้ใช้ $g = 4.75$ ตามผลการทดลองในเอกสารอ้างอิงฉบับที่ [4] ในการคำนวณด้วยระบบวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดต สามารถแสดงด้วยแผนภูมิรูปภาพดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 แผนภูมิของขั้นตอนของการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในกรณีของซิงค์เทลไนด์อัสเตพ

3.6 การสุ่มตัวอย่างแบบฟูเรียร์ฮัพเคท

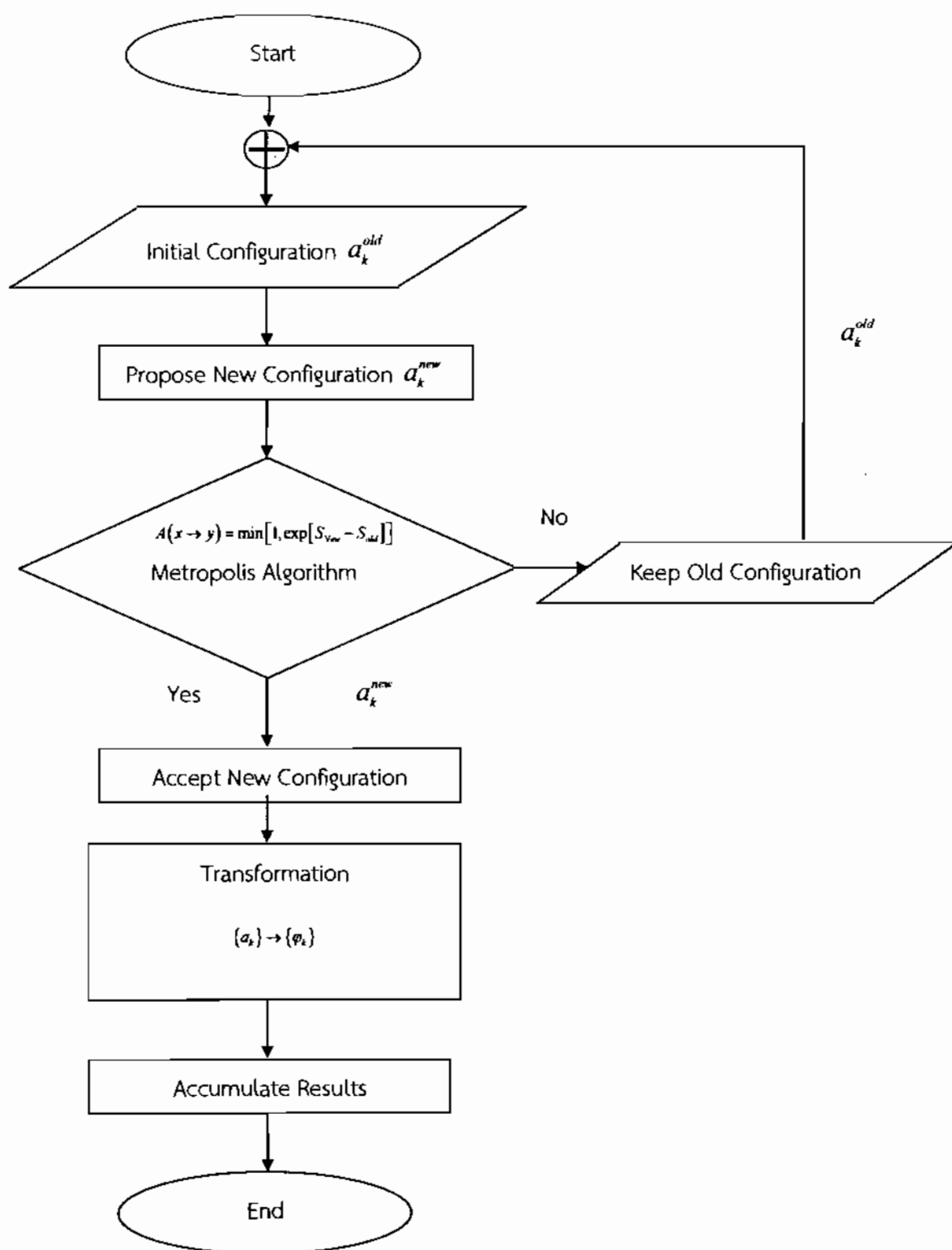
ในการประยุกต์ใช้การสุ่มตัวอย่างแบบฟูเรียร์ฮัพเคท ขั้นแรกต้องทำการแปลงค่าแอกชันที่อยู่ในรูปของตัวแปรเฟสตาม สมการที่ (3.32) ให้อยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ก่อน โดยการใช้การแปลงตามสมการ

$$a_k = \sum_{j=1}^N \phi_j \sin(k\pi j/N) \quad (3.38)$$

ยกตัวอย่างเช่นคูลอมบ์แอกชันในเทอมที่หนึ่งสมการที่ (3.30) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ได้เป็น

$$S_C^{1st} = 2C_p N \sum_{k=1}^N a_k^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \quad (3.39)$$

เมื่อ $C_p = N/4\beta E_c$ จากสมการที่ (3.39) ในการสุ่มตัวอย่างด้วยระเบียบวิธีของเมโทรโพลิส ในกรณีนี้สามารถทำการสุ่มตัวอย่างโดยใช้ค่าของสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ $\{a_k\}$ แทนที่การสุ่มตัวอย่างด้วยตัวแปรเฟส $\{\phi_j\}$ ได้ แต่เนื่องจากในโครงงานนี้ไม่สามารถเขียนค่าแอกชันของการทะลุผ่านให้อยู่ในพจน์ของสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ได้ ดังนั้นในการคำนวณค่าแอกชันของการทะลุผ่านยังคงใช้การคำนวณจากค่าตัวแปรเฟสเหมือนเช่นในกรณีของวิธีการซิงค์เกิลส์ฮัพเคท แต่ในกรณีนี้การสุ่มตัวอย่างได้ทำการสุ่มตัวอย่างจากสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ สามารถแสดงได้ดังแผนภาพที่ 3.4 และผลการคำนวณทั้งหมดได้แสดงไว้ในบทที่ 4



รูปที่ 3.4 แผนภูมิของขั้นตอนของการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในกรณีของเฟอร์มิออน

บทที่ 4

ผลการทดลองและอภิปรายผล

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยและประจุสุทธิเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวที่อุณหภูมิต่างๆ พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลที่ได้จากทฤษฎีแบบดั้งเดิมกับวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล นอกจากนี้ยังได้เปรียบเทียบผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยที่จากระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซด์อัพเดทกับระเบียบวิธีฟูเรียร์อัพเดทของทั้งสองวิธีเพื่อนำไปสู่ผลการสรุปว่าวิธีการใดมีประสิทธิภาพสูงสุด

4.1 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว

เพื่อตรวจสอบผลกับการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวที่ได้จากวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล ให้พิจารณาการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวโดยทฤษฎีแบบดั้งเดิมซึ่งกล่าวว่า ค่าเฉลี่ยของปริมาณใดๆ สามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} x_i e^{-\beta E_i}}{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta E_i}} \quad (4.1)$$

โดยที่อนุภาคในระบบทฤษฎีแบบดั้งเดิมมีพฤติกรรมเป็นไปตามการแจกแจงของแมกเวลล์โบลทซ์มันน์ (Maxwell-Boltzmann Distribution) กล่าวคือ

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta E_i} = 1 \quad (4.2)$$

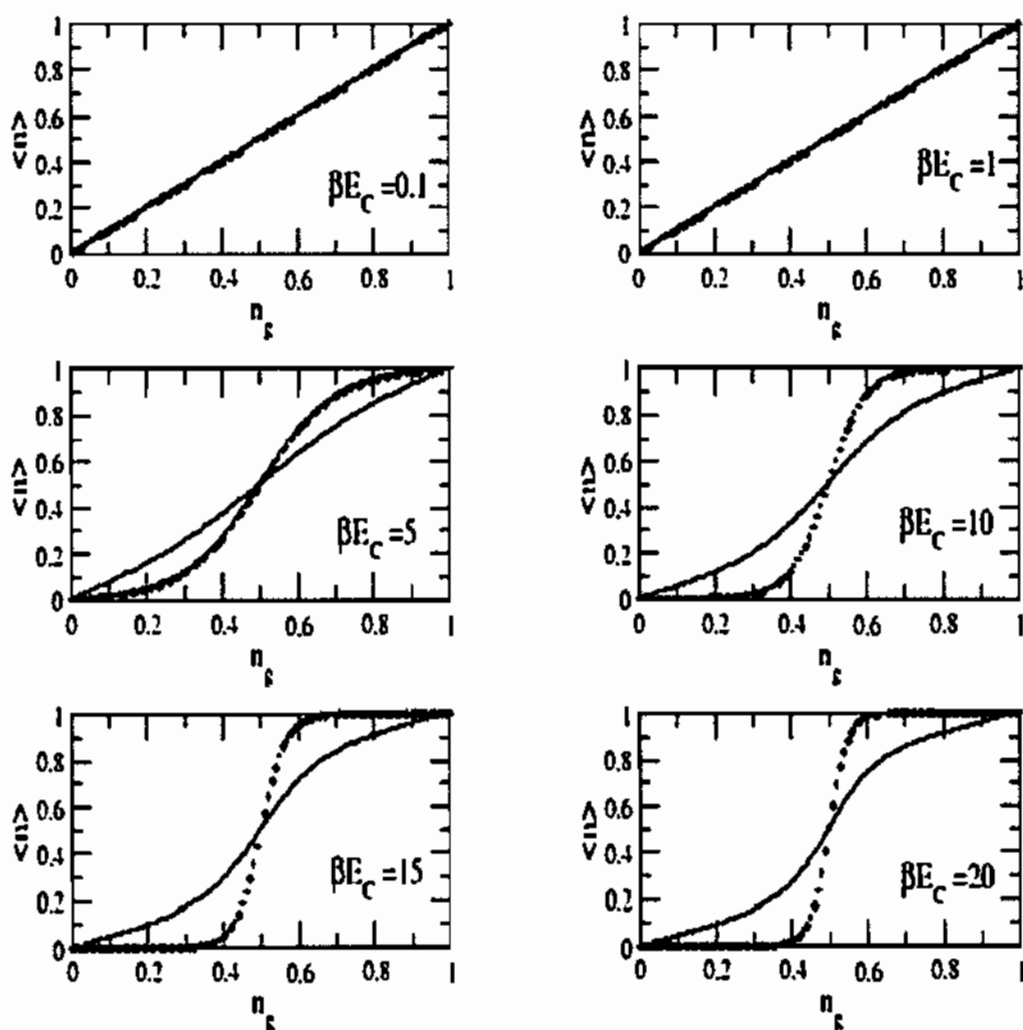
ดังนั้นในกรณีนี้ จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยสามารถคำนวณตามสมการ

$$\langle n \rangle = n_g - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta E_C(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_C(n)}} \quad (4.3)$$

เมื่อ $E_C(n)$ หมายถึงพลังงานการเพิ่มประจุซึ่งเป็นไปตามสมการที่ (2.11) ในสมการนี้ได้ใช้โบลทซ์มันน์แฟกเตอร์ (Boltzmann Factor) กล่าวคือพจน์ $\exp(-\beta E_C)$ เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E(n)$ นอกจากนี้ในสมการนี้ไม่ได้พิจารณาผลปรากฏการณ์การทะลุผ่าน (Tunneling Effect) ดังนั้น

สมการนี้จึงเป็นจริงเฉพาะที่อุณหภูมิสูง กล่าวคือ $k_B T \gg E_C$ หรือ $\beta E_C \ll 1$ ซึ่งอนุภาคในระบบนี้จะมีพฤติกรรมเป็นไปตามการแจกแจงของแมกเวลล์โบลทซ์มันน์

ในการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล ในลำดับแรกต้องคำนวณค่าเฉลี่ยของจำนวนโวน์ดิง ตามสมการที่ (3.27) แล้วนำค่าดังกล่าวไปแทนลงในสมการที่ (2.28) สุดท้ายแล้วจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยสามารถเขียนได้ตามสมการที่ (3.37) ซึ่งวิธีดังกล่าวนี้ได้พิจารณาพลังงานที่เกิดจากปรากฏการณ์ทะลุผ่าน (ตามสมการที่ (3.24)) และพลังงานจากแรงคูลอมบ์ (ตามสมการที่ (3.25)) ดังนั้นจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวที่คำนวณได้โดยวิธีการนี้จึงสอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวทุกช่วงอุณหภูมิ ผลการคำนวณของทั้งสองวิธีได้ถูกแสดงและเปรียบเทียบกัน ในรูป 4.1



รูปที่ 4.1 ผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยข้อมูลสีดำ และข้อมูลสีแดงเป็นผลที่คำนวณได้จากทฤษฎีแบบดั้งเดิมและวิธีการควอนตัมมอนติคาร์โลตามลำดับ

จากรูปที่ 4.1 ในกรณีที่ $\beta E_C = 0.1$ และ $\beta E_C = 1$ ผลการคำนวณทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกันมากอันเนื่องมาจากในกรณีที่อุณหภูมิมีค่าสูง อิเล็กตรอนที่อยู่ชั่วขณะมีพลังงานจลน์มากพอจนสามารถทะลุผ่านไปยังควอนตัมดอทได้ในสภาวะนี้ไม่เกิดปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ ในกรณีนี้จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวซึ่งมีค่าแปรผันตรงกับค่า n_g แต่ในกรณีที่ $\beta E_C = 5$, $\beta E_C = 10$, $\beta E_C = 15$ และ $\beta E_C = 20$ จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยที่คำนวณจากทั้งสองวิธีมีค่าที่แตกต่างอย่างชัดเจนซึ่งกรณีนี้เป็นกรณีที่พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยกว่าพลังงานการเพิ่มประจุ กล่าวคือ $E_C > k_B T$ เป็นผลให้ปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์กลายเป็นปรากฏการณ์เด่นชัดขึ้น โดยสังเกตได้จากเมื่อค่า n_g มีค่าประมาณ 0.5 อิเล็กตรอนจะสามารถผ่านเข้าไปยังควอนตัมดอทได้ ในกรณีของทฤษฎีแบบดั้งเดิมซึ่งไม่ได้พิจารณาผลของปรากฏการณ์ทะลุผ่าน อิเล็กตรอนสามารถทะลุผ่านที่ n_g เท่ากับ 0.5 เท่านั้น กล่าวคือกราฟที่ได้เป็นลักษณะสเต็ปฟังก์ชัน (Step Function) แต่ในส่วนของผลที่คำนวณได้จากควอนตัมมอนติคาร์โลมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงคล้ายกับผลที่ได้จากทฤษฎีแบบดั้งเดิม อันเป็นผลที่เกิดจากปรากฏการณ์การทะลุผ่านซึ่งได้ทำให้ลักษณะของเส้นกราฟมีความต่อเนื่องมากขึ้นดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1

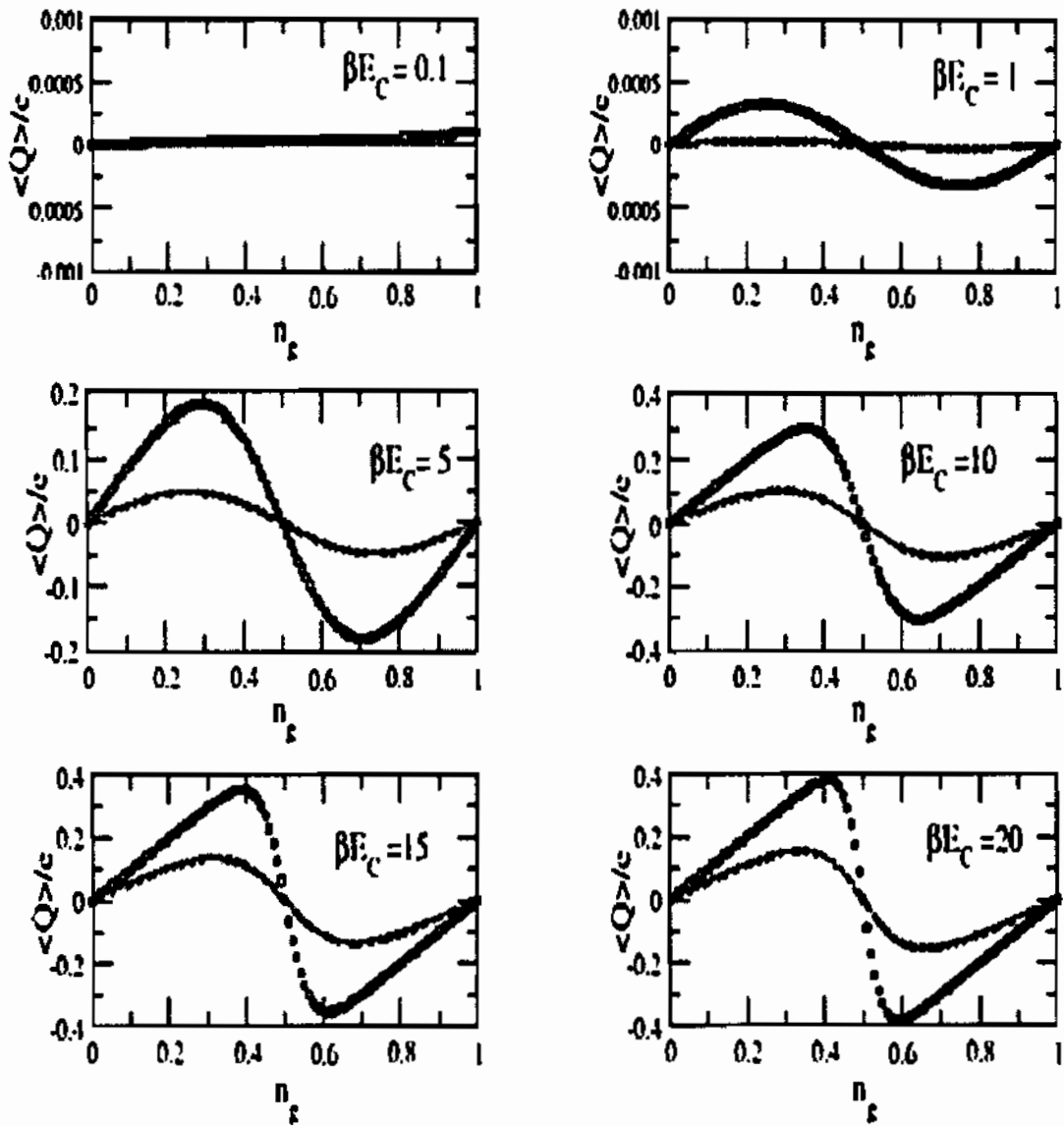
4.2 จำนวนประจุสุทธิเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว

ในหัวข้อนี้แสดงผลของการคำนวณจำนวนประจุสุทธิเฉลี่ย ซึ่งนิยามตามสมการ

$$\langle Q \rangle = n_g - \langle n \rangle \quad (4.2)$$

โดยค่า $n_g = C_g V_g / e$ และค่า $\langle n \rangle$ เป็นข้อมูลที่คำนวณได้จากหัวข้อ 4.1 ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.2

จากรูปที่ 4.2 ในกรณีที่ $\beta E_C = 0.1$ และ $\beta E_C = 1$ เห็นได้ชัดว่าทั้งสองวิธีคำนวณจำนวนประจุเฉลี่ยมีค่าใกล้เคียงกันมาก กล่าวคือจำนวนประจุสุทธิเฉลี่ยมีค่าประมาณศูนย์เนื่องจากอิเล็กตรอนมีพลังงานจลน์สูงมากจนสามารถทะลุผ่านควอนตัมดอทได้โดยไม่เกิดปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์ ทำให้จำนวนประจุรวมสุทธิมีค่าประมาณศูนย์ กล่าวคือมีการถ่ายเทอิเล็กตรอนด้วยพลังงานความร้อนเท่านั้น แต่ในกรณีที่ $\beta E_C = 5$, $\beta E_C = 10$, $\beta E_C = 15$ และ $\beta E_C = 20$ จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยที่อยู่ในทรานซิสเตอร์ที่คำนวณจากทั้งสองวิธีมีค่าที่แตกต่างกัน กล่าวคือที่ $\beta E_C \gg 1$ ปรากฏการณ์การขัดขวางแบบคูลอมบ์สามารถที่สังเกตเห็นได้ชัดเจน ดังนั้นการที่อิเล็กตรอนสามารถที่ทะลุผ่านมายังควอนตัมดอทได้ ต้องใช้พลังงานเท่ากับพลังงานเพิ่มประจุ กล่าวคือที่ $n_g = 0.5$ ส่วนความแตกต่างระหว่างผลการคำนวณโดยวิธีทั้งสองเป็นผลอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์การทะลุผ่าน



รูปที่ 4.2 ผลการคำนวณประจุสุทธิเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยว โดยข้อมูลสีดำเป็นผลที่คำนวณได้จากทฤษฎีแบบดั้งเดิม ส่วนข้อมูลสีแดงคือผลที่คำนวณได้จากวิธีควอนตัมมอนติคาร์โล

4.3 ผลการเปรียบเทียบระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซต์ออฟเดฟและฟูเรียร์ออฟเดฟ

ในหัวข้อนี้แสดงผลการเปรียบเทียบการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยใช้ระเบียบวิธีซิงค์เกิลไซต์ออฟเดฟและฟูเรียร์ออฟเดฟ ในโครงการนี้ใช้การสุ่มตัวอย่าง 1,000,000 และ 250,000 ตัวอย่างสำหรับวิธีซิงค์เกิลไซต์ออฟเดฟและวิธีฟูเรียร์ออฟเดฟตามลำดับ แต่ในส่วนของการคำนวณค่า Trotter Number (N) ของทั้งสองกรณีใช้ค่าเดียวกันคือ $N = 128$ นอกจากนี้ในการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูล ได้ทำการคำนวณค่าจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยใช้ชุดของตัวเลขสุ่มที่แตกต่างกัน 5 ชุดเพื่อให้ได้ตัวอย่างที่เป็นอิสระต่อกัน 5 ชุดข้อมูล ดังนั้นค่าเฉลี่ยสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\langle n \rangle_{avg} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \langle n \rangle_i \quad (4.3)$$

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคำนวณได้ตามสมการ

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (n_i - \langle n \rangle_{avg})^2 \quad (4.4)$$

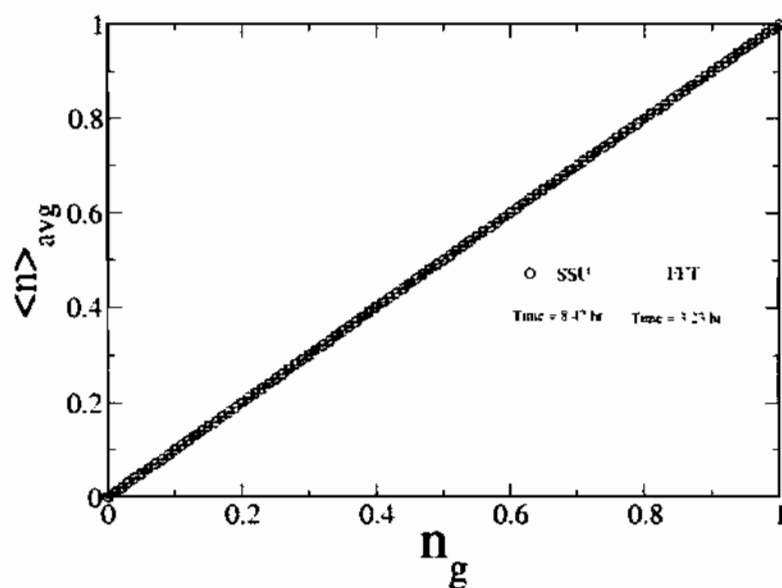
ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนของการคำนวณโดยมอนติคาร์โลซึ่งถูกแสดงในรูปของแท่งความคลาดเคลื่อน (Error Bar) ตามสมการ

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{\sigma^2}{5}} \quad (4.5)$$

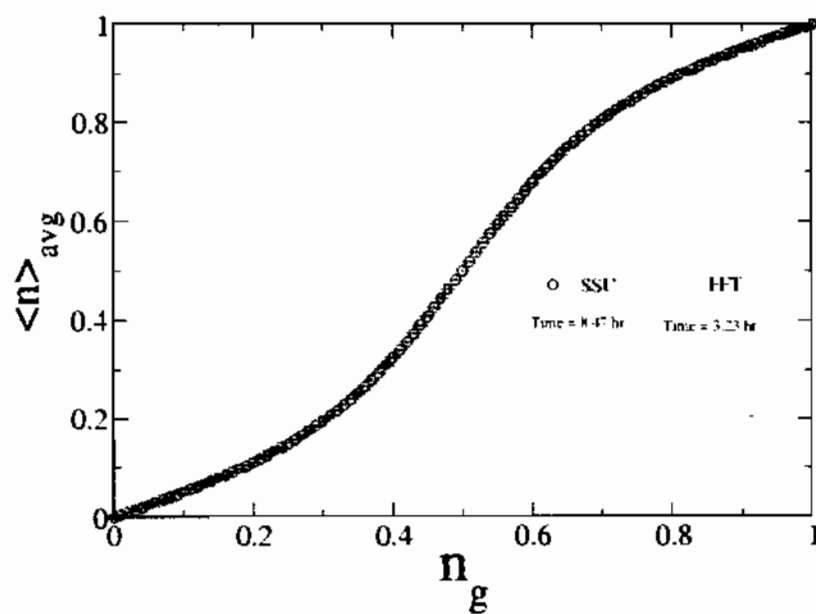
จากสมการ (4.5) ค่าความคลาดเคลื่อนของการคำนวณโดยมอนติคาร์โลสามารถคำนวณ ได้ดังนี้

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (n_i - \langle n \rangle_{avg})^2} \quad (4.6)$$

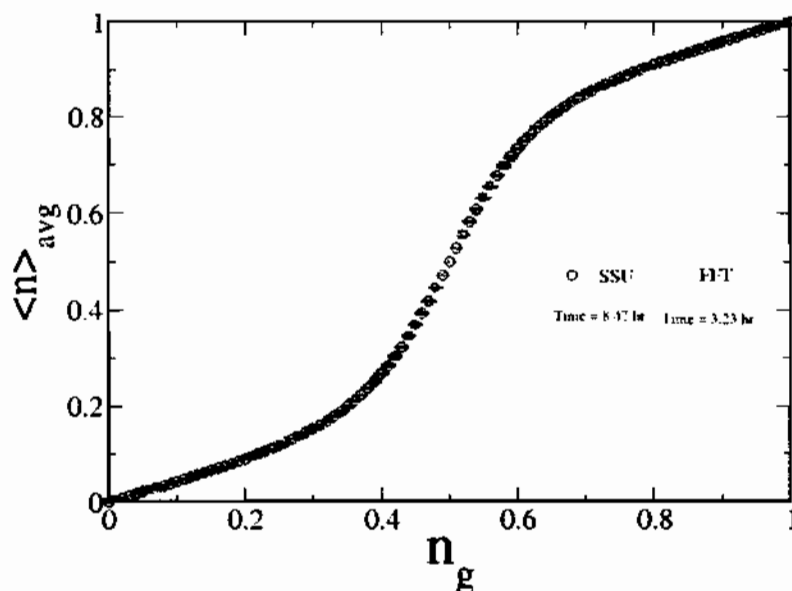
จากสมการ (4.6) พบว่าค่าจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยตามสมการที่ (3.37) ถูกเขียนใหม่เป็น $\langle n \rangle \equiv \langle n \rangle_{avg} \pm \varepsilon$ โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนแปรผันกับรากที่สองของจำนวนของตัวอย่างที่ถูกสุ่ม โดยผลการคำนวณถูกแสดงไว้ในรูปดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.3 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยจากการคำนวณโดยวิธีซิงค์เกิลไซด์อัปเดพและฟูเรียร์อัปเดพที่ $\beta E_C = 1$



รูปที่ 4.4 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยจากการคำนวณวิธีซิงค์เกิลไซด์อัปเดพและฟูเรียร์อัปเดพที่ $\beta E_C = 10$



รูปที่ 4.5 จำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยจากการคำนวณวิธีจังก์เกิลไฮโดรเจนและฟูเรียร์ฮอปเพอร์
 $\beta E_C = 20$

จากรูปที่ 4.3-4.5 พบว่าผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยทั้งสองวิธีได้ผลตรงกันทุกค่า
 อุณหภูมิ แต่สิ่งที่แตกต่างกันคือค่าความคลาดเคลื่อนและเวลาในการประมวลผลดังแสดงในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย $\bar{\epsilon}$ จากการคำนวณทั้งสองวิธีที่อุณหภูมิต่างๆโดย $\bar{\epsilon}$ นิยามตาม
 สมการ (4.7) ในกรณีของ SSU ใช้เวลาในการประมวลผลเฉลี่ย 8.47 ชั่วโมง ส่วนกรณีของ FFT ใช้เวลา
 ในการประมวลผลเฉลี่ย 3.23 ชั่วโมง

$\bar{\epsilon}$	$\beta E_C = 1$	$\beta E_C = 10$	$\beta E_C = 20$
SSU	0.001	0.050	0.118
FFT	0.003	0.033	0.068

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (n_i - \bar{n})^2} \quad (4.7)$$

จากสมการที่ (4.7) ค่า 100 หมายถึงจำนวนในการแบ่งช่วงของค่า $n_g = (0,1)$ จากตารางที่ 4.1 ค่า
 ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นทั้งสองวิธีมีค่าแปรผันตรงกับอุณหภูมิกล่าวคือเมื่ออุณหภูมิมียิ่งต่ำค่าความ
 คลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนนี้เป็นความคลาดเคลื่อนของระบบ (Systematic Error)
 เกิดขึ้นจากการคำนวณใช้ค่าตัวเลขของทรอดเดอร์ ($N=128$) ทุกค่าอุณหภูมิ ทำให้ $\Delta\tau \approx 0.008$

และ $\Delta\tau \approx 0.159$ ในกรณีที่อุณหภูมิต่ำคือ $\beta E_c = 1$ และ $\beta E_c = 20$ ตามลำดับ ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนซึ่งแปรผันตรงกับ $\Delta\tau^2$ จึงมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าอุณหภูมิต่ำลง [5]

นอกจากนี้ตารางที่ 4.1 ในกรณีที่อุณหภูมิต่ำคือ $\beta E_c = 1$ การคำนวณมอนติคาร์โลโดยใช้วิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดตให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าการคำนวณด้วยวิธีฟูเรียร์อัปเดต ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่าที่อุณหภูมิต่ำทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมดกระจายตัวอยู่รอบๆ ทางเดินแบบฉบับ (Classical Path) ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนจึงไม่ขึ้นอยู่กับวิธีในการสุ่มตัวอย่างแต่ขึ้นอยู่กับจำนวนของตัวอย่าง กล่าวคือวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดตใช้จำนวนตัวอย่าง $M = 1,000,000$ และ วิธีฟูเรียร์อัปเดตใช้จำนวนตัวอย่าง $M = 250,000$ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้ย่อมแปรผันตรงกับ $M^{-1/2}$ นั่นเอง

แต่ที่อุณหภูมิต่ำกล่าวคือ $\beta E_c > 1$ ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีฟูเรียร์อัปเดตมีค่าน้อยกว่าวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดต ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่าทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมดกระจายออกจากทางเดินแบบฉบับมากกว่าที่อุณหภูมิต่ำกล่าวคือเข้าสู่ช่วงของปรากฏการณ์ควอนตัม (Quantum region) คือยิ่งอุณหภูมิต่ำค่าการกระจายก็มากตามไปด้วย ดังนั้นในการสุ่มตัวอย่างจึงต้องอาศัยระเบียบวิธีที่ทำให้การสุ่มตัวอย่างกระจายออกไปครอบคลุมทางเดินที่เป็นไปได้ให้มากที่สุด ซึ่งจากตารางที่ 4.1 จะเห็นได้ว่ายิ่งอุณหภูมิต่ำการคำนวณด้วยวิธีฟูเรียร์อัปเดตยังมีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธีซิงค์เกิลไซต์อัปเดตซึ่งเห็นได้จากค่าความคลาดเคลื่อนและเวลาที่ใช้ในการประมวล

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการทดลอง

จากผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยใช้วิธีควอนตัมมอนติคาร์โลพบว่าจำนวนอิเล็กตรอนขึ้นอยู่กับค่าศักย์ไฟฟ้าที่ให้เข้ากับขั้วเกต ในกรณีที่อุณหภูมิต่ำ กล่าวคือ $\beta E_C > 1$ ผลการคำนวณได้แสดงให้เห็นถึงการเกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ที่เกิดขึ้นในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว นอกจากนี้ผลการคำนวณยังแสดงให้เห็นถึงปรากฏการณ์การทะลุผ่านของอิเล็กตรอนที่เกิดขึ้นร่วมกับการเกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สำคัญของอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยว

ในโครงงานนี้ยังได้เปรียบเทียบผลการคำนวณจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยโดยใช้ระเบียบวิธีซิงค์เกิลโชดท์ออฟเดฟกับระเบียบวิธีฟูเรียร์ออฟเดฟ พบว่าที่อุณหภูมิต่ำ ซึ่งเป็นบริเวณที่เกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์การคำนวณโดยระเบียบวิธีฟูเรียร์ออฟเดฟมีประสิทธิภาพสูงกว่าระเบียบวิธีซิงค์เกิลโชดท์ออฟเดฟดังสังเกตได้จากค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยกว่าและสามารถลดเวลาในการประมวลผลได้ถึง 38%

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าระเบียบวิธีฟูเรียร์ออฟเดฟมีประสิทธิภาพสูงกว่าระเบียบวิธีซิงค์เกิลโชดท์ออฟเดฟในการคำนวณหาจำนวนอิเล็กตรอนเฉลี่ยในทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว โดยเฉพาะในช่วงอุณหภูมิที่เกิดปรากฏการณ์ขัดขวางแบบคูลอมบ์

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยวโดยใช้วิธีมอนติคาร์โล มีข้อเสนอแนะสำหรับผู้สนใจศึกษาในเรื่องนี้ ดังต่อไปนี้

1. ในการศึกษาอุปกรณ์อิเล็กตรอนเดี่ยวแบบอื่นซึ่งมีความซับซ้อนมากกว่าระบบของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กตรอนเดี่ยว ยกตัวอย่างเช่นซิงค์เกิลอิเล็กตรอนปั๊ม (Single Electron Pump) [13] โดยใช้วิธีควอนตัมมอนติคาร์โลนั้น ขอเสนอให้ใช้ระเบียบวิธีฟูเรียร์ออฟเดฟในการประมวลผลเพื่อที่จะได้รับผลการคำนวณที่ถูกต้องและยังลดเวลาในการประมวลผลได้

2. ในโครงงานนี้ใช้ค่า N คงที่ทุกกรณีแม้ว่าที่อุณหภูมิต่ำลง ซึ่งในความเป็นจริงแล้วค่าที่ต้องค่าเท่ากันคือค่า $\Delta\tau = \beta E_C / N$ เพื่อจำกัดให้ค่าความคลาดเคลื่อนของระบบ (Systematic Error) มีค่าเท่ากัน ดังนั้นในการศึกษาครั้งต่อไปเมื่อค่าอุณหภูมิต่ำลงหรือเมื่อ βE_C เพิ่มขึ้นควรเพิ่มค่า N เพื่อให้ $\Delta\tau$ มีเท่ากันทุกค่าอุณหภูมิ



3. ในการแปลงค่าแอกชันของทรานซิสเตอร์แบบอิเล็กทรอนิกส์เดี่ยวในโครงงานฟิสิกส์นี้สามารถเขียนเฉพาะค่าคูลอมบ์แอกชันให้อยู่ในเทอมของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ได้เท่านั้น แต่ไม่ได้เขียนตัวแอกชันของการทะลุผ่านให้อยู่ในเทอมของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ซึ่งถ้าเขียนแอกชันของการทะลุผ่านให้อยู่ในเทอมของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์มีความเป็นไปได้ที่จะสามารถลดเวลาในการประมวลผลลงได้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- [1] H. Garbert and M. H. Devoret, Single Charge Tunneling, Plenum Press, New York, vol. 294 of NATO ASI series B: Physics (1992).
- [2] J. W. Negele and H. Orland, Quantum Many-Particle Systems, vol. 68 of Frontiers in Physics (Addison-Wesley, 1987).
- [3] M. H. Devoret, D. Esteve and C. Urbina, Single-Electron Transfer in Metallic Nanostructures, Nature 360, 547 (1992).
- [4] C. Theis, G. Goeppert and H. Grabert, Conductance of the Single-Electron Transistor: A Comparison of Experimental Data with Monte Carlo Calculations, Phys. Rev. B 66, 125314 (2002).
- [5] C. Theis, Conductance of Single Electron Devices from Imaginary-Time Path Integrals, Ph.D. thesis, Albert-Ludwigs-University, Freiburg i. Br. (2004).
- [6] C. Chakravarty, M. Gordillo and D. M. Ceperley, A Comparison of the Efficiency of Fourier and Discrete Time-Path Integral Monte Carlo, J. Chem. Phys (1998).
- [7] H. Pothier, P. Lafarge, C. Urbina, D. Esteve and M. H. Devort, Direct Observation of Macroscopic Charge Quantization, EuroPhys. Lett. 17, 249 (1992).
- [8] R. Waser, Nanoelectronics and Information Technology, Advanced Electronic Materials and Novel Devices (WILEY-VCH, 2003).
- [9] G. Goeppert and H. Grabert, Charge Fluctuations in the Single-Electron Box, Phys. Rev. B 63, 125307 (2001).
- [10] S. Weinierl, Introduction to Monte Carlo Methods, (NIKHEF Theory Group, 2000).
- [11] M. Newman and G. T. Barkema, Monte Carlo Methods in Statistical Physics, (Oxford University Press, Oxford, 1999).
- [12] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, (McGraw-Hill, Inc, 1995).

- [13] P. Srivilai, Quantum Monte Carlo Study the Metallic Single Electron, Ph.D. thesis, Albert-Ludwigs-University, Freiburg i. Br. (2012).

ต้นฉบับไม่ปรากฏข้อมูล

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติผู้จัดทำโครงงาน



ชื่อ-นามสกุล	นายตะวัน ทองสุข
วัน/เดือน/ปีเกิด	10 ตุลาคม 2533
ภูมิลำเนา	1 หมู่ 9 ต. นางัว อ. น้ำโสม จ. อุดรธานี อ. น้ำโสม จ. อุดรธานี
E-mail	tawanthongsuk@hotmail.co.th
โทรศัพท์	084-6838232

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2546	สำเร็จ การศึกษาระดับประถมศึกษาจาก โรงเรียนบ้านนางัว ต. นางัว อ. น้ำโสม จ. อุดรธานี
พ.ศ. 2552	สำเร็จ การศึกษาระดับมัธยมศึกษาจาก โรงเรียนน้ำโสมพิทยาคม ต. นางัว อ. น้ำโสม จ. อุดรธานี
พ.ศ. 2556	สำเร็จ การศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาชีพฝึกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ต.ขามเรียง อ. กันทรวิชัย จ. มหาสารคาม